ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2015. Вип. 23. С. 14–17
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 23. P. 14–17

УДК 519.6

МОДИФІКОВАНИЙ ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МІНОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ ГЛАДКИХ І НЕГЛАДКИХ ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

Р. Бігун, Г. Цегелик

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: bigunroman@ukr.net

Розглянуто модифікацію чисельного методу мінорантного типу відшукання екстремуму довільних гладких і негладких опуклих функцій двох дійсних змінних, яка забезпечує більшу швидкість збіжності.

Ключові слова: некласична мінoранта Ньютона та її діаграма, апроксимація функцій, чисельний метод оптимізації.

1. ВСТУП

В [1, 2] побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, який використано для апроксимації функцій та розробки чисельного методу оптимізації гладких і негладких опуклих функцій двох дійсних змінних. В [3] побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї й двох дійсних змінних, заданих таблично, який використано здебільшого для розробки чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їхніх систем, точних на певних класах функцій. В [4] цей апарат використано для побудови чисельних методів для аналізу дискретних оптимізаційних процесів.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай в області $D=\{a\le x\le b, c\le y\le d\}$ визначена опукла функція $f(x,y)$, яка може бути гладкою або негладкою. Вважатимемо, що $f(x,y)>0$ для всіх $x\in[a,b]$. Якщо функція $z=f(x,y)$ набуває від'ємних значень на проміжку $[a,b]$, то замість неї можна розглядати функцію $y=f(x,y)+C$, де стала C підібрана так, що $f(x,y)+C>0$ для всіх $x\in[a,b]$. Побудуємо в області *D* сітку

$$x=x_i=a+ih,\quad i=0,1,\ldots,n;\ h=\frac{b-a}{n};$$

$$y=y_j=c+js,\quad j=0,1,\ldots,m;\ s=\frac{d-c}{m}.$$

Позначимо

$$f(x_i,y_j)=a_{ij}\ \ (i=0,1,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,m).$$

Побудуємо для значень $f(x_i,y_j)=a_{ij}$ некласичну мінoранту Ньютона $m_f(x,y)$ [1, 2]. Оскільки функція $f(x,y)$ є опуклою в області *D*, то

$$m_f\left(x_i, y_j\right) = a_{ij} \quad \left(i = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m\right).$$

Тоді *числові нахили мінораніти Ньютона* $m_f\left(x, y\right)$ визначатимемо за формулами:

$$r_{ij}\left(x\right) = \left(\frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{h}} \quad \left(i = 1,2,\ldots,n;\ \ j = 0,1,\ldots,m\right),$$

$$r_{ij}\left(y\right) = \left(\frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{s}} \quad \left(i = 0,1,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m\right), .$$

$$r_{ij}\left(x, y\right) = \left(\frac{a_{i-1,j-1}}{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{s^2+h^2}}} \quad \left(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m\right).$$

3. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Спочатку зауважимо таке: якщо для деякої точки $\left(x_k, y_l\right)\epsilon D$ виконуються умови

$$r_{kl}\left(y\right) \geq 1,\ r_{k,l+1}\left(y\right) < 1, \quad (2)$$

то точка $\left(x_k, y_l\right)$ з точністю $\varepsilon = \max\left(s, h\right)$ є точкою екстремуму функції $f\left(x, y\right)$.

Вибравши за початкове наближення екстремальної точки будь-яку точку $\left(x_k, y_l\right)\epsilon D$, алгоритм методу є таким.

1. Обчислюємо $r_{kl}\left(x\right),\ r_{kl}\left(y\right), r_{k+1,l}\left(x\right),\ r_{k,l+1}\left(y\right)$. Якщо виконуються умови (1), (2), то точка $\left(x_k, y_l\right)$ з точністю $\varepsilon \leq \max\left(s, h\right)$ приймається за оптимальну і на цьому робота алгоритму завершується. Якщо обидві умови не виконуються, то визначаємо $\tilde{r}_{kl} = max\left\{r_{kl}\left(x\right),\ r_{kl}\left(y\right),\ r_{kl}\left(x, y\right)\right\}$ і переходимо до пункту 2. Якщо умова (1) виконується, а умова (2) ні, то визначаємо $\tilde{r}_{kl} = max\left\{r_{kl}\left(y\right),\ r_{kl}\left(x, y\right)\right\}$ і переходимо до пункту (3). Якщо умова (2) виконується, а умова (1) ні, то визначаємо $\tilde{r}_{kl} = max\left\{r_{kl}\left(x\right),\ r_{kl}\left(x, y\right)\right\}$ і переходимо до пункту (4).

2. Якщо $r_{kl}\left(x\right) \geq 1 i\, r_{kl}\left(y\right) \geq 1$, то при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}\left(x\right)$ за точку $\left(x_k, y_l\right)$ приймаємо $\left(x_{k+1}, y_l\right)$ і переходимо до пункту (1); при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}\left(y\right)$ за точку $\left(x_k, y_l\right)$ приймаємо $\left(x_k, y_{l+1}\right)$ і переходимо до пункту (1); при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}\left(x, y\right)$ за точку $\left(x_k, y_l\right)$ приймаємо $\left(x_{k+1}, y_{l+1}\right)$ і переходимо до пункту (1). Якщо $r_{kl}\left(x\right) \leq 1, r_{kl}\left(y\right) \leq 1$, то при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}\left(x\right)$ за точку $\left(x_k, y_l\right)$ приймаємо $\left(x_{k-1}, y_l\right)$ і переходимо до пункту (1); при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}\left(y\right)$ за точку $\left(x_k, y_l\right)$ приймаємо $\left(x_k, y_{l-1}\right)$ і переходимо до пункту (1); при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}\left(x, y\right)$ за точку $\left(x_k, y_l\right)$ приймаємо $\left(x_{k-1}, y_{l-1}\right)$ і переходимо до пункту (1).

3. Якщо $r_{kl}\left(y\right) \geq 1$, то при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}\left(y\right)$ за точку $\left(x_k, y_l\right)$ приймаємо $\left(x_k, y_{l+1}\right)$ і переходимо до пункту (1); при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}\left(x, y\right)$ за точку $\left(x_k, y_l\right)$ приймаємо $\left(x_{k+1}, y_{l+1}\right)$ і переходимо до пункту (1). Якщо $r_{kl}\left(y\right) \leq 1$, то при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}\left(y\right)$ за точку $\left(x_k, y_l\right)$

приймаємо (x_k, y_{l-1}) і переходимо до пункту (1); при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо (x_{k-1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту (1).

4. Якщо $r_{kl}(x) \geq 1$, то при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо (x_{k+1}, y_l) і переходимо до пункту (1); при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо (x_{k+1}, y_{l+1}) і переходимо до пункту (1). Якщо $r_{kl}(x) \leq 1$, то при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо (x_{k-1}, y_l) і переходимо до пункту (1); при $\tilde{r}_{kl} = r_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо (x_{k-1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту (1).

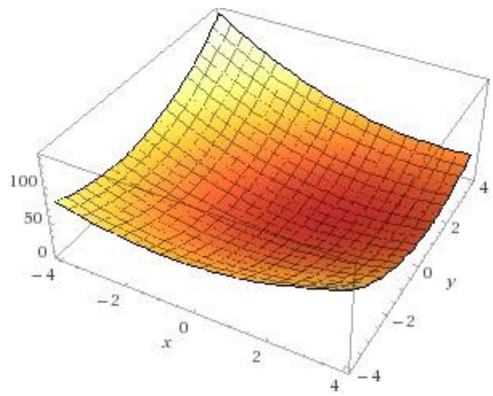
Якщо з більшою точністю треба знайти екстремальну точку, то за область D беремо окіл знайденої точки, зменшуємо кроки h і s і виконуємо описаний алгоритм.

3. ПРИКЛАД

Розглянемо задачу оптимізації функції

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 2xy - 5x + 10 . \quad (3)$$

Графік цієї функції зображено на рис.



Графік функції (3)

Нехай $h = s = 0.1,\ D = \{-1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$. Виберемо точку (0,5;0,5) за початкову й отримаємо

$$(x_k, y_l) = (0,5; 0,5); r_{kl}(x) = 1,643; r_{kl}(y) = 0,812$$

Повторюючи кроки 1 – 4 алгоритму, перейдемо до точки (1,5;0,5), для якої виконуються умови (1), (2). Послідовність ітерацій подано у табл.

Послідовність ітерацій

Номер за пор.	(x_k, y_l)	$r_{kl}(x)$	$r_{k+1,l}(x)$	$r_{kl}(y)$	$r_{k,l+1}(y)$	$r_{kl}(x, y)$
1	(0,6;0,5)	1,6025	1,5552	0,825	0,7685	1,2047
2	(0,7;0,5)	1,5552	1,5016	0,8402	0,7794	1,1927
3	(0,8;0,5)	1,5016	1,4423	0,8579	0,7926	1,1786

Номер за пор.	(x_k, y_l)	$r_{kl}(x)$	$r_{k+1,l}(x)$	$r_{kl}(y)$	$r_{k,l+1}(y)$	$r_{kl}(x,y)$
4	(0,9;0,5)	1,4423	1,3781	0,8781	0,8082	1,1625
5	(1;0,5)	1,3781	1,3103	0,901	0,8263	1,1444
6	(1,1;0,5)	1,3103	1,2404	0,9264	0,8470	1,1246
7	(1,2;0,5)	1,2404	1,1697	0,9543	0,8702	1,1033
8	(1,3;0,5)	1,1697	1,0999	0,9843	0,8958	1,0809
9	(1,4;0,5)	1,0999	1,0325	1,0161	0,9236	1,0578
10	(1,5;0,5)	1,0325	0,9686	1,04905	0,9532	1,0344

Отже, з точністю 0,1 точку (1,5;0,5) приймаємо за точку, де функція досягає свого мінімуму. У цьому випадку $f(1,5;0,5)=6,25$.

Список використаної літератури

1. *Bihun R.R.* Device of non-classical Newton's minorant of functions of two real table-like variables and its application in numerical analysis / R.R. Bihun, G.G. Tsehelyk // International Journal of Information and Communication Technology Research. – 2014. – Vol. 4, No. 7. – С. 284-287.
2. *Бігун Р.Р.* Чисельний метод мінорантного типу відшукання екстремуму довільних логарифмічно опуклих функцій двох дійсних змінних / Р.Р. Бігун, Г.Г. Цегелик // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2014. – Вип. 12. – С. 64-68.
3. *Цегелик Г.Г.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г.Г. Цегелик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 190 с.
4. *Глебена М.І.* Математичні моделі та числові методи мажорантного типу для аналізу дискретних оптимізаційних процесів: автореф. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / М.І. Глебена. – Івано-Франківськ, 2012. – 23 с.

Стаття: надійшла до редколегії 08.07.2015
доопрацьована 02.09.2015
прийнята до друку 28.10.2015

THE MODIFIED NUMERICAL METHOD OF FINDING THE EXTREMUM OF MINORANT TYPE OF ARBITRARY AS SMOOTH AND NONSMOOTH CONVEX FUNCTIONS OF TWO REAL VARIABLES

R. Bihun, H. Tsehelyk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: bigunroman@ukr.net

The modification of numerical method of minarant type of finding the extremum of arbitrary as smooth and nonsmooth convex functions of two real variables is considered in this paper, that provides greater speed of convergence.

Key words: nonclassical Newton's minarant and its diagram, function approximation.