ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2015. Вип. 23. С. 7–13
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 23. P. 7–13

О Б Ч И С Л Ю В А Л Ь Н А   М А Т Е М А Т И К А

УДК 519.6

ДОСЛІДЖЕННЯ ТРИКРОКОВОГО РІЗНИЦЕВОГО АНАЛОГУ МЕТОДУ ЗІ ШВИДКІСТЮ ЗБІЖНОСТІ $1+\sqrt{2}$ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

М. Бартіш, О. Ковальчук

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: olyak2005@gmail.com

Запропоновано трикрокову різницеву модифікацію методу зі швидкістю збіжності $1+\sqrt{2}$ для розв'язування нелінійних операторних рівнянь. Доведено збіжність методу. Проведено чисельні експерименти на тестових задачах, виконано порівняння з базовим методом, зроблено висновки щодо отриманих результатів. Апробація методу підтверджує теоретичні дослідження.

Ключові слова: трикроковий метод, система нелінійних рівнянь, метод зі швидкістю збіжності $1+\sqrt{2}$.

1. ВСТУП

Математичне моделювання складних фізичних процесів дуже часто потребує розв'язування систем нелінійних рівнянь. Універсальних методів для успішного розв'язування широкого класу подібних задач немає, тому актуальною є проблема побудови нових ефективніших алгоритмів. Пропонуємо ітераційний метод для розв'язування систем, який використовує інформацію, обчислену на попередніх кроках. Проведено теоретичні та практичні дослідження цього методу.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай P – нелінійний оператор, визначений в опуклій області D банахового простору X із значеннями в банаховому просторі Y. Розглянемо рівняння

$$P(x)=0. \tag{1}$$

Для розв'язування рівняння (1) використовують класичний метод Ньютона та його модифікації, які мають у формулах похідні першого, а то й вищих порядків. Часто на практиці виникає проблема обчислень похідних оператора $P(x)$. Це пов'язано з тим, що в більшості випадків відображення описується доволі складною формулою або відомо лише $P(x)$ при заданому x. У цьому випадку наближені значення похідних отримують за різницевими формулами. Перевагою різницевих методів є те, що в їхніх ітераційних формулах використовують тільки значення нелінійного оператора і не потрібно аналітично заданих похідних. У праці [1] досліджено різницевий метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$, який потребує двох початкових наближень x_0,θ_0. Будемо вважати, що виконуються такі умови $\|P(\theta_0)\|\le\|P(x_0)\|$, $\|x_0-\theta_0\|\le\varepsilon$

$$x_{k+1} = x_k - \left[P(x_k, \theta_k)\right]^{-1} P(x_k)$$
$$\theta_{k+1} = x_{k+1} - \left[P(x_k, \theta_k)\right]^{-1} P(x_{k+1}) \tag{2}$$
$$k = 0,1,\ldots,$$

де $P(x, y)$ – поділена різниця першого порядку [3].

Основною особливістю методу є те, що значення поділеної різниці $P(x, y)$ використовується двічі, що допомагає прискорити процес розв'язування задачі. На кожній ітерації кількість додаткових обчислень незначні порівняно з різницевим методом Ньютона.

Ми пропонуємо трикроковий метод для задачі(1)

$$x_1 = x_0 - \left[P(x_0, \theta_0)\right]^{-1} P(x_0)$$
$$\theta_k = x_k - \left[P(x_{k-1}, \theta_{k-1})\right]^{-1} P(x_k), \tag{3}$$
$$v_k = x_k - \left[P(x_k, \theta_k)\right]^{-1} P(x_k)$$
$$x_{k+1} = \arg\min \left\| P\left(\theta_k + \lambda_k (v_k - \theta_k)\right) \right\|$$
$$\mathrm{k} = 1,2,\ldots \ .$$

Очевидно, що x_1 цього методу збігається з першим наближенням, яке отримали за різницевим методом Ньютона. Для обчислення точок θ_k використовують значення поділених різниць, вже відомі з попереднього кроку. Отож, метод (3) не потребує значної кількості додаткових обчислень на кожній ітерації порівняно з методом (2), виконується лише одновимірна мінімізація.

3. ОБҐРУНТУВАННЯ ЗБІЖНОСТІ

Теорема. Нехай виконуються умови:

1) $P(x)$ – неперервний в області $D \subset R^n$; $D = \left\{ x \in R^n : \|x - x_0\| \le B \|P(x_0)\| \right\}$;

2) $\forall x, y \in D \ \ \|P(x, y)\| \le M_1$;

3) $\forall x, y, z \in D \ \ \|P(x, y, z)\| \le M_2$, де $P(x, y, z)$ – друга поділена різниця;

4) $\forall x, y \in D$ існує обернений оператор $\left[P(x, y)\right]^{-1}$, причому $\left\| \left[P(x, y)\right]^{-1} \right\| \le B$;

5) в D існує x^*, яка є розв'язком задачі (1) і $P(x^*) = 0$;

6) початкове наближення x_0 та θ_0 вибрані так, що
$$C = \max\left\{ M_1 M_2 B^3, M_2 B^2 \sqrt{3BM_1} \right\}, \ \eta = C \|P(x_0)\| < 1.$$

Тоді послідовність $\{x_k\}$, породжена формулами (3), коректно визначена та збігається до x^* і справджується оцінка

$$\|P(x_k)\| \le \prod_{i=1}^{k} \mu_i^{t_{k-i+1}} \eta^{D_k} \|P(x_0)\|, \tag{4}$$

де $D_{k+1} = 2D_k + D_{k-1} + 2, \ D_{-1} = -1, \quad D_0 = 0$.

$$t_k = 2t_{k-1} + t_{k-2},\ \ t_1 = 1,\ \ t_2 = 2, k = 3, 4, ...$$
$$\mu \in (0;1]$$

Доведення. Позаяк перше наближення обчислюється за різницевим методом Ньютона, то можна записати так, використовуючи умову 6 теореми
$$\left\| x_1 - x^* \right\| \le BM_2 \left\| \theta_0 - x^* \right\| \left\| x_0 - x^* \right\|.$$

За умовами теореми та розвиненням $P(x)$ в ряд Тейлора, для $\forall x' \in D$ можна записати
$$\left\| P(x') \right\| \le M_1 \left\| x' - x^* \right\|, \quad \left\| x' - x^* \right\| \le B \left\| P(x') \right\|. \tag{5}$$
Отже, використовуючи (5)
$$\left\| P(x_1) \right\| \le M_1 \left\| x_1 - x^* \right\| \le M_1 B^3 M_2 \left\| P(x_0) \right\| \left\| P(\theta_0) \right\| \le M_1 B^3 M_2 \left\| P(x_0) \right\|^2 = \eta^{D_1} \left\| P(x_0) \right\|.$$
Оскільки для обчислення першого наближення не використовується формула для θ_k, то треба перевірити правильність тверджень теореми для $k = 1$. Отримаємо спочатку оцінку величини $\left\| v_1 - x^* \right\|$
$$v_1 - x^* = x_1 - x^* - P(x_1, \theta_1)^{-1} P(x_1) = P(x_1, \theta_1)^{-1} P(x_1, \theta_1, x^*)(x_1 - x^*)(\theta_1 - x^*).$$
Оцінивши за нормою
$$\left\| v_1 - x^* \right\| \le BM_2 \left\| x_1 - x^* \right\| \left\| \theta_1 - x^* \right\|. \tag{6}$$
Запишемо оцінку для $\left\| \theta_1 - x^* \right\|$
$$\begin{aligned}\theta_1 - x^* &= x_1 - x^* - P(x_0, \theta_0)^{-1} P(x_1) = \\ &= P(x_0, \theta_0)^{-1} \left(P(x_0, \theta_0) - P(x_1, x^*) \right)(x_1 - x^*) = \\ &= P(x_0, \theta_0)^{-1} \left(P(x_0, \theta_0, x^*)(\theta_0 - x^*) + P(x_0, x_1, x^*)(x_0 - x_1) \right)(x_1 - x^*).\end{aligned}$$
Пронормувавши
$$\begin{aligned}\left\| \theta_1 - x^* \right\| &\le BM_2 \left(\left\| \theta_0 - x^* \right\| + \left\| x_0 - x_1 \right\| \right) \left\| x_1 - x^* \right\| \le \\ &\le BM_2 \left(\left\| \theta_0 - x^* \right\| + \left\| x_0 - x^* \right\| + \left\| x^* - x_1 \right\| \right) \left\| x_1 - x^* \right\| \le \\ &\le B^3 M_2 \left(\left\| P(\theta_0) \right\| + \left\| P(x_0) \right\| + \left\| P(x_1) \right\| \right) \left\| P(x_1) \right\|.\end{aligned} \tag{7}$$
Оскільки значення функції у наступній точці наближення має бути завжди меншим, ніж у попередній точці, то можемо записати таке:
$$\left\| P(\theta_{k-1}) \right\| \le \left\| P(x_{k-1}) \right\|, \ \left\| P(x_k) \right\| \le \left\| P(x_{k-1}) \right\|. \tag{8}$$
Використовуючи попередні оцінки для $k = 1$, отримаємо з (7)
$$\left\| \theta_1 - x^* \right\| \le 3B^3 M_2 \left\| P(x_0) \right\| \left\| P(x_1) \right\|. \tag{9}$$
Підставляючи (9) в (6)
$$\left\| v_1 - x^* \right\| \le 3B^5 M_2^2 \left\| P(x_0) \right\| \left\| P(x_1) \right\|^2.$$
Використавши формулу для визначення x_k та використавши (5), запишемо
$$\begin{aligned}\left\| P(x_2) \right\| &\le \mu_1 \left\| P(v_1) \right\| \le \mu_1 M_1 \left\| v_1 - x^* \right\| \le \mu_1 3 M_1 B^5 M_2^2 \left\| P(x_0) \right\| \left\| P(x_1) \right\|^2 \le \\ &\le \mu_1 3 M_1 B^5 M_2^2 \left\| P(x_0) \right\| \eta^{2D_1} \left\| P(x_0) \right\|^2 \le \mu_1 \eta^{2D_1 + 2} \left\| P(x_0) \right\| = \mu_1 \eta^{D_2} \left\| P(x_0) \right\|.\end{aligned}$$

Отже, для $k=1$ оцінка (4) виконується.

Припустимо, що (4) виконується для послідовності наближень $x_3,\ldots,x_k$. Тоді, використавши метод математичної індукції, перевіримо чи виконується оцінка (4) для x_{k+1}.

Аналогічно до попереднього викладення можна довести

$$v_k - x^* = x_k - x^* - P\left(x_k,\theta_k\right)^{-1} P\left(x_k\right) = P\left(x_k,\theta_k\right)^{-1} P\left(x_k,\theta_k,x^*\right)\left(x_k - x^*\right)\left(\theta_k - x^*\right).$$

Оцінивши за нормою попередній вираз

$$\left\|v_k - x^*\right\| \le BM_2\left\|x_k - x^*\right\|\left\|\theta_k - x^*\right\|, \tag{10}$$

отримаємо оцінку для $\left\|\theta_k - x^*\right\|$

$$\theta_k - x^* = x_k - x^* - P\left(x_{k-1},\theta_{k-1}\right)^{-1} P\left(x_k\right) =$$
$$= P\left(x_{k-1},\theta_{k-1}\right)^{-1}\left(P\left(x_{k-1},\theta_{k-1},x^*\right)\left(\theta_{k-1} - x^*\right) + P\left(x_{k-1},x_k,x^*\right)\left(x_{k-1} - x_k\right)\right)\left(x_k - x^*\right).$$

Пронормувавши

$$\begin{aligned}\left\|\theta_k - x^*\right\| &\le BM_2\left(\left\|\theta_{k-1} - x^*\right\| + \left\|x_{k-1} - x^*\right\| + \left\|x_k - x^*\right\|\right)\left\|x_k - x^*\right\| \le \\ &\le B^5 M_2\left(\left\|P(\theta_{k-1})\right\| + \left\|P(x_{k-1})\right\| + \left\|P(x_k)\right\|\right)\left\|P(x_k)\right\|,\end{aligned} \tag{11}$$

використовуючи (8) для k отримаємо з (10)

$$\left\|\theta_k - x^*\right\| \le 3B^2 M_2\left\|P(x_{k-1})\right\|\left\|P(x_k)\right\|.$$

Підставляючи цю оцінку в (11), отримаємо

$$\left\|v_k - x^*\right\| \le 3B^5 M_2^2\left\|P(x_{k-1})\right\|\left\|P(x_k)\right\|^2.$$

Отож, за ідеєю побудови методу та використавши (5)

$$\left\|P(x_{k+1})\right\| \le \mu_k\left\|P(v_k)\right\| \le \mu_k M_1\left\|v_k - x^*\right\| \le \mu_k 3M_1 B^5 M_2^2\left\|P(x_{k-1})\right\|\left\|P(x_k)\right\|^2 \le$$
$$\le \mu_k 3M_1 B^5 M_2^2 \prod_{i=1}^{k-1}\mu_i^{t_{k-i}}\eta^{D_{k-1}}\left\|P(x_0)\right\|\left(\prod_{i=1}^{k}\mu_i^{t_{k-i+1}}\eta^{D_k}\left\|P(x_0)\right\|\right)^2 = \prod_{i=1}^{k+1}\mu_i^{t_{k-i+2}}\eta^{D_{k+1}}\left\|P(x_0)\right\|.$$

Теорема доведена.

4. АПРОБАЦІЯ

В більшості випадків досить важко підібрати "гарне" початкове наближення, тому використовують демпфований [2] множник. Отже, остаточно методи набудуть такого вигляду:

$$\begin{gathered} x_{k+1} = x_k - \alpha_k\left[P(x_k,\theta_k)\right]^{-1} P(x_k) \\ \theta_{k+1} = x_{k+1} - \beta_k\left[P(x_k,\theta_k)\right]^{-1} P(x_{k+1}) \\ k = 0,1,\ldots. \end{gathered} \tag{2'}$$

при $\alpha_0,\beta_k \in \left(0;1\right]$.

$$\begin{gathered} x_1 = x_0 - \alpha_0\left[P(x_0,\theta_0)\right]^{-1} P(x_0) \\ \theta_k = x_k - \alpha_k\left[P(x_{k-1},\theta_{k-1})\right]^{-1} P(x_k), \\ v_k = x_k - \beta_k\left[P(x_k,\theta_k)\right]^{-1} P(x_k) \end{gathered} \tag{3'}$$

$$x_{k+1} = \arg\min \left\| P\left(\theta_k + \lambda_k (v_k - \theta_k)\right) \right\|$$

$k = 1,2,...$ при $\alpha_0, \beta_k \in \left(0;1\right]$.

Тестування методів проведено на прикладах [3,4]. В табл. 1-3 подано результати роботи методу для прикладів, де N– розмірність задачі; i – кількість ітерацій затрачених на пошук наближення до розв’язку задачі; k – кількість обчислень, еквівалентних обчисленню вектор-функції $P(x)$. Обчислення проводили до виконання умови $\|x_k - x_{k-1}\| \le 10^{-8}$.

Приклад 1. Розширена сингулярна система Пауелла

$$P_{4k-3}(x) = x_{4k-3} + 10x_{4k-2}; \quad P_{4k-2}(x) = \sqrt{5}\left(x_{4k-1} - x_{4k}\right);$$

$$P_{4k-1}(x) = \left(x_{4k-2} - 2x_{4k-1}\right)^2; \quad P_{4k}(x) = \sqrt{10}\left(x_{4k-3} - x_{4k}\right)^2;$$

$$x_0 = \left(3;-1;0;1;...,3;-1;0;1\right); \quad 1 \le k \le \frac{n}{4}.$$

Розв’язок $x^* = \left(0;...;0\right)$; $P\left(x^*\right) = 0$.

Ця функція має в точці розв’язку вироджений якобіан.

Таблиця 1

N		16	20	40	52	60	72	80	100
Метод 2’	i	25	25	25	25	26	26	26	26
	k	475	575	1075	1375	1638	1950	2158	2678
Метод 3’	i	7	7	7	7	7	7	7	7
	k	181	209	349	433	489	573	629	769

Приклад 2. Сингулярна Функція Бройдена

$$P_k(x) == \left(\left(3-2x_k\right)x_k - 2x_{k+1} + 1\right)^2 \quad , \qquad \mathrm{k} = 1$$

$$P_k(x) == \left(\left(3-2x_k\right)x_k - x_{k-1} - 2x_{k+1} + 1\right)^2, \qquad 1 < k < n$$

$$P_k(x) == \left(\left(3-2x_k\right)x_k - x_{k-1} + 1\right)^2, \qquad k = n$$

$$x^0 = (-1,.....-1)$$

Розв’язок $P\left(x^*\right) = 0$, x^* різний для різних n.

Таблиця 2

N		16	20	40	52	60	72
Метод 2’	i	24	24	24	24	24	24
	k	456	552	1032	1320	1512	1800
Метод 3’	i	9	9	9	9	9	9
	k	252	288	476	584	656	764

Приклад 3. Розширена функція Фреденштейна та Руфа

$$P_k = x_k + \left(\left(5 - x_{k+1}\right)x_{k+1} - 2\right)x_{k+1} - 13, \quad \operatorname{mod}\left(k,2\right) = 1$$
$$P_k = x_{k-1} + \left(\left(x_k + 1\right)x_k - 14\right)x_k - 29, \quad \operatorname{mod}\left(k,2\right) = 0$$
$$x_0 = (90, 60, ..., 90, 60)$$

Розв'язок $x^* = \left(5;4;...;5;4\right)$; $P\left(x^*\right) = 0$.

Таблиця 3

N		16	20	40	52	60	72	100
Метод 2'	i	11	11	11	11	11	11	11
	k	209	253	473	605	693	825	1133
Метод 3'	i	9	9	9	9	9	9	9
	k	231	267	447	555	627	735	987

5. ВИСНОВКИ

Ми дослідили новий різницевий трикроковий метод для розв'язування систем нелінійних рівнянь. Наведена теорема та її доведення про швидкість збіжності запропонованого методу, а також подано порядок збіжності методу.

На підставі числових обчислень та порівнянні отриманих результатів бачимо, що запропонований метод (3) ефективніший у сенсі кількості обчислень і кількості ітерацій від методу (2). Запропонований метод не втрачає своїх переваг для функцій з поганими властивостями. Зі збільшенням розмірності задачі ефективність методу в сенсі кількості обчислень збільшується

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бартіш М.Я.* Про один різницевий метод розв'язування нелінійних рівнянь // М.Я. Бартіш, Ю.М. Щербина // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 7. – С. 579-582.
2. *Дэннис Дж. мл.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис мл., Р. Шнабель. – М.: Мир, 1988.
3. *Ульм С.Ю.* Об обобщенных разделенных разностях // С.Ю. Ульм // Известия АН ЭССР. Т. XVI, № 1. – 1967. – С. 13-26.
4. *Luksan L.* Test problems for unconstrained optimization // L. Luksan, J. Vlcek // Institute of computer science, Academy of sciences of the Czech Republic, 2003.
5. *More Jorge J.* Hillstrom Testing unconstrained optimization software // Jorge J. More, S.Garbow Burton, E. Kenneth // ACM Transactions on mathematical Software. – Vol. 7, No. 1. – March 1981. – P. 17-41.

Стаття: надійшла до редколегії 02.09.2015
доопрацьована 14.10.2015
прийнята до друку 28.10.2015

HREE-STEP FINITE-DIFFERENCE MODIFICATION OF METHOD WITH SPEED OF CONVERGENCE $1+\sqrt{2}$ FOR SOLVING SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS

M. Bartish, O. Kovalchuk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: olyak2005@gmail.com

In this paper, we investigate the problem of solving system of nonlinear equations and present a new three-step finite-difference method which is based on method with speed of convergence $1+\sqrt{2}$. Meanwhile, the convergence analysis of the new method is discussed and proves theorem where the convergence of the proposed method is justified and the rate of convergence is established. Several examples are given to illustrate its efficiency.

The results shows that the presented method converge more rapidly than classic method with speed of convergence $1+\sqrt{2}$ and require the less number of function evaluation. Furthermore, for most of the functions we tested, the new method demonstrates at least equal performance compared to the well-known classical methods of the same order. Particularly, it is noteworthy that the presented method shows better performance than the compared classic methods.

Key words: three-step method, method with speed of convergence $1+\sqrt{2}$, system of nonlinear equations.