ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2016. Вип. 24. С. 85–91
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 24. P. 85–91

УДК 511.3

СУМІСНІ НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДІВ І ЗНАЧЕНЬ ДВОХ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА

О. Мильо, Я. Холявка

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: olga.mylyo@gmail.com, ya_khol@franko.lviv.ua

Нехай $\wp_i(z)$, $(i=1,2)$ − алгебрично незалежні еліптичні функції Вейєрштрасса з алгебричними інваріантами. Отримано оцінку сумісного наближення періодів цих функцій і значень кожної з цих функцій у періодах іншої та в алгебричній точці α.

Ключові слова: сумісні наближення, еліптична функція Вейєрштрасса.

1. ВСТУП

Дослідження арифметичної природи та властивостей постійних, пов'язаних з еліптичними функціями, описані в багатьох працях (див., наприклад, [1, 2]). У цій статті отримано оцінку сумісного наближення значень двох алгебрично незалежних еліптичних функцій Вейєрштрасса з алгебричними інваріантами та зі спільним періодом у довільній алгебричній точці α та кожної з цих функцій у тому періоді іншої функції, який не є спільним для них, та їхніх інваріантів. Еліптична функція Вейєрштрасса $\wp(z)$ задовольняє рівняння $(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ [3], числа g_2, g_3 називають інваріантами $\wp(z)$. Будемо вивчати алгебрично незалежні еліптичні функції Вейєрштрасса $\wp_1(z)$ та $\wp_2(z)$, які мають алгебричні інваріанти $g_{1,2}, g_{1,3}$ і $g_{2,2}, g_{2,3}$, відповідно, та спільний період. Позначимо через (ω, ω_1) пару основних періодів функції $\wp_1(z)$, а через (ω, ω_2) − функції $\wp_2(z)$ [3, 4, 5]. Позначимо через α довільне число таке, що $m\omega + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \alpha$ не є полюсами $\wp_1(z)$ та $\wp_2(z)$ при усіх $m, m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$.

Надалі будемо дотримуватись таких позначень [2]: через $d(P)$, $L(P)$ позначимо степінь і довжину полінома P з цілими коефіцієнтами; $\xi_1, \ldots \xi_7$ − наближаючі алгебричні числа, $d_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ − їхні степені та довжини, відповідно.

Теорема 1. Для довільних алгебричних чисел $\xi_1, \ldots \xi_7$ справджується

$$|\omega - \xi_1| + |\omega_1 - \xi_2| + |\wp_1(\alpha) - \xi_3| + |\wp_2(\alpha) - \xi_4| +$$

$$+ |\wp_2(\omega_1) - \xi_5| + |\omega_2 - \xi_6| + |\wp_1(\omega_2) - \xi_7| > \exp\left(-\Lambda T^3\right), \qquad (1)$$

де $n_0 = \deg \mathbf{Q}(\xi_1, \ldots \xi_7)$, $T^2 = n_0\left(\frac{\ln L_1}{d_1} + \ldots + \frac{\ln L_7}{d_7} + \ln n_0\right)$, $\Lambda > 0$ − константа, залежна лише від чисел $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3}$ та α.

Подібні задачі та оцінки можна знайти, наприклад, в [2], [6], [7].

2. ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Сформулюємо основні леми, потрібні для доведення теореми. Нехай $c_1,\ldots,c_4$ − додатні константи, які не залежать від n_0, d_i, L_i та Λ.

Лема 1. Для довільного $m \in \mathbf{N}$ існують такі поліноми P_m та Q_m з цілими коефіцієнтами, що

$$\wp(mz) = \frac{P_m(\wp(z), g_2, g_3)}{Q_m(\wp(z), g_2, g_3)},$$

де $L(P_m), L(Q_m) \le \exp(c_1 m^2)$, $\deg P_m$, $\deg Q_m \le m^2$.

Лема 2. Для довільних $s, l \in \mathbf{N}$ існує такий поліном $P_{s,l}$ з цілими коефіцієнтами, що

$$(\wp^l(z))^{(s)} = \frac{d^s}{d\,z^s}((\wp(z)^l) = P_{s,l}(g_2, g_3, \wp(z), \wp'(z)),$$

$$L(P_{s,l}) \le \exp(c_2 s \log(s+l)), \ \deg P_{s,l} \le c_3(s+l).$$

Лема 3. Якщо z, w, $z+w$ допустимі значення $\wp(z)$, то

$$\wp(z+w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\right)^2 - \wp(z) - \wp(w).$$

Доведення лем 1 − 3 є, наприклад, в [5].

Лема 4 ([7]). Нехай $B, P \in \mathbf{N}$, $Q_{p,b} \in \mathbf{Z}[x_1,\ldots,x_n]$, $0 \le b < B$, $0 \le p < P$, $L(Q_{p,b}) \le L$, $\deg_{x_i} Q_{p,b} \le N_i$; $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ − алгебричні числа, $m = \deg \mathbf{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Якщо $P > mB$, то система лінійних рівнянь

$$\sum_{p=0}^{P-1} x_p Q_{p,b}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0, \quad 0 \le b < B,$$

має цілі раціональні розв’язки $A_0,\ldots,A_{P-1}$ такі, що

$$0 < \max|A_i| < 1 + (LP)^{\frac{mB}{P-mB}}\left(\prod_{i=1}^{n}(1+N_i)\big(L(\alpha_i)(1+d(\alpha_i))\big)^{\frac{N_i}{d(\alpha_i)}}\right)^{\frac{mB}{P-mB}}.$$

Лема 5 ([7]). Нехай $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ − алгебричні числа, $P \in \mathbf{Z}[x_1,\ldots,x_n]$, $\deg_{x_i} P \le N_i$, $m = \deg \mathbf{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Якщо $P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \not\equiv 0$, то

$$|P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)| \ge L(P)^{1-m} \prod_{i=1}^{n} L(\alpha_i)^{\frac{-N_i m}{d(\alpha_i)}}.$$

Позначимо $|f(z)|_D = \sup_{|z|\le D}|f(z)|$.

Лема 6 ([7]). Нехай R_1, $R_2 \in \mathbf{R}$, $8 < 4R_1 < R_2$, $f(z)$ аналітична в крузі $|z| \le R_2$, E − множина з D^2 точок, які належать кругу $|z| \le R_1$ і відстань між якими для кожної пари точок не менше ε, $0 < \varepsilon < 1$. Тоді

$$|f(z)|_{|z|\le R_1} \le 2\,|f(z)|_{|z|\le R_2}\left(\frac{4R_1}{R_2}\right)^{D^2S} + 2DR_1^{-1}\left(\frac{33R_1}{\varepsilon D}\right)^{D^2S}\max_{x\in E,\,0\le s\le S}\left|\frac{f^{(s)}(x)}{s!}\right|.$$

Лема 7 ([6]). Нехай $\sigma(z)$ − σ-функція Вейєрштрасса, що відповідає $\wp(z)$. Функції $\sigma(z)$ та $\sigma(z)\wp(z)$ цілі і для $M>1$ виконуються оцінки

$$|\sigma(z)\wp(z)|_M,\ |\sigma(z)|_M \le c_4^{M^2}.$$

Якщо ε − відстань від найближчого полюса $\wp(z)$ до z_0 і $|z_0|\le M$, то $|\sigma(z_0)|\ge \varepsilon c_5^{-M^2}$.

3. ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ

Доведення будемо проводити методом Чудновського−Фельдмана [8, 9], який є узагальненням другого методу Гельфонда [1].

Лема 8. Для довільних алгебричних чисел $\xi_1,\dots\xi_5$ справджується така оцінка:

$$|\omega-\xi_1|+|\omega_1-\xi_2|+|\wp_1(\alpha)-\xi_3|+|\wp_2(\alpha)-\xi_4|+|\wp_2(\omega_1)-\xi_5|>\exp\left(-\lambda^8N^3\right),$$

де $N^2 = n\left(\frac{\ln L_1}{d_1}+\dots+\frac{\ln L_5}{d_5}+\ln n\right)$, $n=\deg\mathbf{Q}(\xi_1,\dots\xi_5)$, λ − натуральне число, залежне лише від $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3}$ та α .

Для доведення Леми 8 з’ясуємо , що справджується таке твердження.

Лема 9. Якщо λ − достатньо велике, то нерівність

$$|\omega-\xi_1|+|\omega_1-\xi_2|+|\wp_1(\alpha)-\xi_3|+|\wp_2(\alpha)-\xi_4|+|\wp_2(\omega_1)-\xi_5|<\exp\left(-\lambda^8N^3\right) \qquad (2)$$

неможлива.

Доводити лему 9 будемо від супротивного. Приймемо

$$M=[\lambda N],\quad K=L=S=[\lambda^2N], \qquad (3)$$

$m, m_1, s\in\mathbf{Z},\ 0\le s\le S,$ межі зміни m та m_1 будуть зазначені в кожному випадку окремо. Позначимо через $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ лінійно незалежні серед чисел $\xi_1^{u_1},\dots,\xi_5^{u_5}$, $u_i = 0,1,\dots,d_i-1$. Визначимо

$$f(z)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l_1,l_2=1}^{L}C_{k,l_1,l_2}z^k\wp_1^{l_1}(z)\wp_2^{l_2}(z),\quad C_{k,l_1,l_2}=\sum_{\tau=1}^{n}C_{k,l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau,\quad C_{k,l_1,l_2,\tau}\in\mathbf{Z}. \qquad (4)$$

Як і в [8], позначимо $\phi(z)=\wp_2(z+\frac{\omega}{2})$. З леми 3 отримаємо

$$\wp_2(z+w)=\wp_2(z+\frac{\omega}{2}+w+\frac{\omega}{2})=\left(\frac{\phi'(z)-\phi'(w)}{2(\phi(z)-\phi(w))}\right)^2-\phi(z)-\phi(w)=\frac{\Lambda_1(z,w)}{\Lambda_2(z,w)}. \qquad (5)$$

Існують [8] поліноми $G_{s,p,l}$ від $\wp_2(z), \wp_2'(z), \phi(z), \phi'(z)$ такі, що

$$G_{s,p,l}=\frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_1^p(z,w)\Lambda_2^l(z,w))|_{w=0}, \qquad (6)$$

$$\ln L(G_{s,p,l})\le s\ln(s(p+l)+c_1(s+p+l)),\quad \deg G_{s,p,l}\le 4(p+l).$$

Подібно, як у праці [8], та враховуючи, що $(\wp_i'(z))^2 = 4\wp_i^3(z) - g_{i,2}\wp_i(z) - g_{i,3}$ та $\wp_i''(z) = 6\wp_i^2(z) - g_{i,2}/2$, з (5) і (6), отримаємо

$$f^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}((\Lambda_2^{-L}(z,w)(f(z+w)\Lambda_2^L(z,w)))\,|_{w=0} = \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\left(\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}\Lambda_2^{-L}(z,w)\right)\Bigg|_{w=0} \times$$

$$\times\sum_{k=1}^{K}\sum_{l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}\left(\frac{d^{t-i}}{d\,w^{t-i}}(z+w)^k\wp_1^{l_1}(z+w)\right)\Bigg|_{w=0} G_{i,l_2,L-l_2}(z). \tag{7}$$

Позначимо

$$f_{s,t}(z) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}\left(\frac{d^{t-i}}{dw^{t-i}}(z+w)^k\wp_1^{l_1}(z+w)\right)\Bigg|_{w=0} G_{i,l_2,L-l_2}(z). \tag{8}$$

Позначимо через ξ_8, ξ_9 та ξ_{10} наближаючі числа, які визначають рівняннями $\xi_8^2 = 4\xi_5^3 - g_{2,2}\xi_5 - g_{2,3}$, $\xi_9^2 = 4\xi_3^3 - g_{1,2}\xi_3 - g_{1,3}$, $\xi_{10}^2 = 4\xi_4^3 - g_{2,2}\xi_4 - g_{2,3}$; $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_5, \xi_8, \xi_9, \xi_{10})$; $f_{s,m,m_1}(\bar{\xi})$ та $f_{s,t,m,m_1}(\bar{\xi})$ – вирази, отримані з виразів $f^{(s)}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)$ та $f_{s,t}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)$ заміною ω, ω_1, $\wp_2(\omega_1)$, $\wp_1(\alpha)$, $\wp_2(\alpha)$, $\wp_2'(\omega_1)$, $\wp_1'(\alpha)$, $\wp_2'(\alpha)$ на $\xi_1, \dots, \xi_5$, ξ_8, ξ_9, ξ_{10}, відповідно.

Розглянемо $f_{s,t,m,m_1}(\bar{\xi})$, $1 \le m, m_1 \le M$, $0 \le t \le s \le S$, як $M^2 S$ лінійних форм від nKL^2 змінних $C_{k,l_1,l_2,\tau}$. Згідно з лемою 4.1, [7], та (3), (8), виберемо числа $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ так, що для $1 \le m, m_1 \le M$, $0 \le t \le s \le S$

$$f_{s,t,m,m_1}(\bar{\xi}) = 0, \quad 0 < \max|C_{k,l_1,l_2,\tau}| < \exp(c_2\lambda^3 n^{-1} N^3). \tag{9}$$

З (2), (3), (9) для $1 \le m, m_1 \le \lambda M$, $0 \le s \le S$ отримаємо

$$|f^{(s)}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha) - f_{s,m,m_1}(\bar{\xi})| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^8 N^3). \tag{10}$$

З (7)-(10), якщо $1 \le m, m_1 \le M$, $0 \le s \le S$, одержимо

$$|f^{(s)}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^8 N^3). \tag{11}$$

Доведемо, що оцінка (11) також виконується і для $1 \le m, m_1 \le \lambda M$, $0 \le s \le S$.

Лема 10. Нехай нерівність (11) справджується для $1 \le m, m_1 \le 2^d M$, $2^d < \lambda$ при $0 \le s \le S$. Тоді вона справджується і для $1 \le m, m_1 \le 2^{d+1} M$ за тих самих s.

Нехай

$$G(z) = f(z)\sigma_1^{2L}(z)\sigma_2^{2L}(z), \tag{12}$$

де $\sigma_i(z)$ – σ-функція, яка відповідає $\wp_i(z)$ [4]. Виберемо найменше ціле r таке, що

$$r > 4(2^d M + 1)(|\omega| + |\omega_1| + |\omega_2| + |\alpha| + 1). \tag{13}$$

Позначимо $R = 4r$. Тоді з (3), (4), (9), (12) і (13) отримаємо

$$|G(z)|_{|z| \le R} < \exp(-c_3 2^d \lambda^4 N^3). \tag{14}$$

З (14) та леми 4.5 в [7] при $0 \le s \le S$ одержимо

$$|G^{(s)}(z)|_{|z|\le r} < \exp(-2^d \lambda^5 N^3). \tag{15}$$

Для $\varepsilon = R^{-1}$ в ε-околах $V(\varepsilon, m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)$ точок $m\omega + m_1\omega_1 + \alpha$ функції $\sigma_1(z)$ та $\sigma_2(z)$ не мають нулів, тому при $1 \le m, m_1 \le \lambda M$ з леми 7.1 [6] та (3) отримаємо

$$|\sigma_i(z)|_{z\in V(\varepsilon, m\omega+m_1\omega_1+\alpha)} > \exp(-c_4\lambda^4 N^2). \tag{16}$$

З (14)-(16) при $1 \le m, m_1 \le \lambda M$ випливає

$$|f(z)|_{z\in V(\varepsilon, m\omega+m_1\omega_1+\alpha)} < \exp(-2^{2d-1}\lambda^5 N^3). \tag{17}$$

Отже, для $1 \le m, m_1 \le 2^{d+1}M$, $0 \le s \le S$ з (17) отримаємо

$$|f^{(s)}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)| < \exp(-\frac{2^d \lambda^5}{3} N^3). \tag{18}$$

Враховуючи (10), для $1 \le m, m_1 \le 2^{d+1}M$ та $0 \le s \le S$ з (18) випливає

$$|f_{s,m,m_1}(\bar{\xi})| < \exp(-\frac{2^d \lambda^5}{4} N^3). \tag{19}$$

Розглядаючи $f_{s,t,m,m_1}(\bar{\xi})$, $0 \le t \le s \le S$, $1 \le m, m_1 \le 2^{d+1}M$ як значення відповідного полінома в алгебричних точках, з леми 4.1 в [7] та (3) отримаємо для $f_{s,t,m,m_1}(\bar{\xi}) \ne 0$ оцінку

$$|f_{s,t,m,m_1}(\bar{\xi})| > \exp(-\lambda^{3,5} N^3). \tag{20}$$

З (8) та (20) одержимо

$$|f_{s,m,m_1}(\bar{\xi})| > \exp(-\lambda^4 N^3). \tag{21}$$

Оцінки (19) та (21) суперечливі, тому для $1 \le m, m_1 \le 2^{d+1}M$, $0 \le t \le s \le S$ отримаємо $f_{s,m,m_1}(\bar{\xi}) = 0$, що разом з (10) доводить Лему 10.

Оцінимо $|C_{k,l_1,l_2,\tau}|$ зверху. Приймемо

$$\alpha_\kappa = \left(1 - \frac{\kappa}{\lambda L}\right)\frac{\omega + \omega_1 + \alpha}{4}, \kappa = 1, \ldots, L. \tag{22}$$

З леми 4 [9] отримаємо твердження.

Лема 11. Нехай $\Delta = \det(\wp_1^{l_1}(\alpha_\kappa))_{l_1, \kappa=1,\ldots,L}$, $\Delta(\kappa) = \det(\wp_2^{l_2}(m_1\omega_1 + \alpha_\kappa))_{l_2, m_1=1,\ldots,L}$, $\Delta(m_1, \kappa) = \det((m\omega + m_1\omega_1 + \alpha_\kappa)^k)_{m, k=1,\ldots,L}$, $\Delta_{l_1,\kappa}$ – алгебричне доповнення елемента $\wp_1^{l_1}(\alpha_\kappa)$ визначника Δ, $\Delta_{l_2,m_1}(\kappa)$ – елемента $\wp_2^{l_2}(m_1\omega_1 + \alpha_\kappa)$ визначника $\Delta(\kappa)$, $\Delta_{m,k}(m_1,\kappa)$ – елемента $(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha_\kappa)^k$ визначника $\Delta(m_1,\kappa)$. Якщо $\Delta \ne 0$, $\Delta(\kappa) \ne 0$ та $\Delta(m_1,\kappa) \ne 0$, то

$$C_{k,l_1,l_2} = \sum_{\kappa, m, m_1=1}^{L} \frac{\Delta_{l_1,\kappa}}{\Delta}\frac{\Delta_{l_2,m_1}(\kappa)}{\Delta(\kappa)}\frac{\Delta_{m,k}(m_1,\kappa)}{\Delta(m_1,\kappa)} f(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha_\kappa). \tag{23}$$

З (22) випливає, що Δ, $\Delta(\kappa)$ та $\Delta(m_1,\kappa)$, які є визначниками Вандермонда, відмінні від нуля. З (3), (22) і леми 1.1 [6] для довільної $\wp(z)$ випливає

$$|\wp(\alpha_\kappa)-\wp(\alpha_j)|>\exp(-\lambda\ln N), \kappa\neq j. \qquad (24)$$

Використовуючи лему 5.7 з [1], співвідношення (3) та (24), отримаємо

$$\left|\frac{\Delta_{l_1,\kappa}}{\Delta}\right|, \left|\frac{\Delta_{l_2,m_1}(\kappa)}{\Delta(\kappa)}\right|, \left|\frac{\Delta_{m,k}(m_1,\kappa)}{\Delta(m_1,\kappa)}\right| < \exp(c_5\lambda^3 N\ln N). \qquad (25)$$

З леми 7.1 [6] для $1\le m,m_1\le L$, в точках $z=m\omega+m_1\omega_1+\alpha_\kappa$ отримаємо $\min|\sigma^{2L}(z)|>\exp(-c_6\lambda^6N^3)$, тому за умови $(1/2)\lambda\le 2^d\le\lambda$ отримаємо оцінку $|f(m\omega+m_1\omega_1+\alpha_\kappa)|<\exp(-(1/4)\lambda^7N^3)$. Звідси і з (23), (25) та Леми 11 випливає

$$|C_{k,l_1,l_2}|<\exp(-\lambda^6N^3). \qquad (26)$$

Розглядаючи C_{k,l_1,l_2} як значення відповідного полінома (4) $\mathrm{A}_{k,p,l}$ з цілими коефіцієнтами $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ в точці $\xi_1,\dots,\xi_5$ і використовуючи (3) та лему 4.1 [7], для $C_{k,l_1,l_2}\neq 0$ отримаємо $|C_{k,l_1,l_2}|>\exp(-\lambda^4N^3)$, що суперечить оцінці (26). Тому всі C_{k,l_1,l_2} дорівнюють нулеві. Але тоді з (4) і всі $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ дорівнюють нулеві, що суперечить (9). Останнє протиріччя засвідчує, що (2) не справджується, що доводить лему 9, а отже, й лему 8. Якщо в (2) замінити ω_1 на ω_2 і $\wp_2(\omega_1)$ на $\wp_1(\omega_2)$ та прийняти точки $m\omega+m_2\omega_2+\alpha$, то такими ж міркуваннями отримаємо доведення твердження, подібне до леми 8 для так зміненої множини чисел. У цьому випадку при достатньо великому Λ виконується (1). Теорема 1 доведена.

4. ВИСНОВКИ

Оцінку наближення, сформульовану в теоремі, можна використати, наприклад, для дослідження властивостей еліптичних функцій Вейєрштрасса. Порядок оцінки відповідає порядку наближення алгебричними числами констант, пов'язаних з еліптичними функціями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Fel'dman N.I.* Hilbert's seventh problem / N.I. Fel'dman. − M.: Moskov. Gos. Univ., 1982. – 311 p. (in Russian).
2. *Fel'dman N.I.* Transcendental Numbers / N.I. Fel'dman, Yu.V. Nesterenko. − Springer-Verlag, Berlin, 1998. – 345 p.
3. *Bateman H.* Higher transcendental functions / H. Bateman, A. Erdelyi. − M.: Nauka, Vol. 3, 1967. – 299 p. (in Russian).
4. *Уиттекер Э.Е.* Курс современного анализа. Т. 2 / Э.Е. Уиттекер, Дж. Н.М. Ватсон. − Физматгиз, 1963. – 516 с.
5. *Lawden D.F.* Elliptic functions and applications / D.F. Lawden. − Springer-Verlag, Berlin, 1989. – 350 p.
6. *Masser D.* Elliptic functions and transcendence / D. Masser. − Springer-Verlag, Berlin, 1975. – 157 p.

7. *Reyssat E.* Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp / E. Reyssat // Bull. Soc. Math. France. − 1980. − Vol. 108. − P. 47-79.
8. *Chudnovsky G.V.* Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann−Weierschtrass theorem / G.V. Chudnovsky // Inventiones Math. − 1980. − Vol. 61. − P. 267-290.
9. *Фельдман Н.И.* Алгебраическая независимость некоторых чисел / Н.И. Фельдман // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1980. – No. 4. − С. 46-50.

Стаття: надійшла до редколегії 15.04.2015
доопрацьована 13.05.2015
прийнята до друку 27.05.2015

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF PERIODS AND THE VALUES OF TWO ELLIPTIC WEIERSTRASS FUNCTIONS

O. Mylyo, Ya. Kholyavka

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000,
e-mail: olga.mylyo@gmail.com, ya_khol@franko.lviv.ua

Let $\wp_i(z)$, $(i=1,2)$ be algebraically independent Weierstrass elliptic functions. We estimate a simultaneous approximation of their periods and values of each of these functions at the periods of the other function and at the point α.

Key words: simultaneous approximation, Weierstrass elliptic function.