ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2016. Вип. 24. С. 75–84
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 24. P. 75–84

УДК 519.6

ДОСЛІДЖЕННЯ ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ДОПОМОГОЮ УЗАГАЛЬНЕНИХ ОБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ

О. Коссак, І. Борецька, О. Довганик

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kpm@lnu.edu.ua

Розглянуто можливість застосування квазіоберненої та псевдооберненої узагальнених обернених матриць для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для виродженої системи звичайних диференціальних рівнянь з постійною матрицею коефіцієнтів біля вектора похідних. Порівняння результатів, які отримали під час використання квазіоберненої та псевдооберненої матриць, виконано на підставі фізичної моделі транзисторного підсилювача та динамічної моделі розвитку багатогалузевої економіки.

Ключові слова: вироджена система звичайних диференціальних рівнянь, алгебро-диференціальна система, диференціально-алгебрична система, узагальнена обернена матриця, псевдообернена матриця, квазіобернена матриця, модель транзисторного підсилювача, динамічна модель розвитку багатогалузевої економіки.

1. ВСТУП

Досліджуючи процеси економіки, медицини, фізики, ракетобудування натрапляємо на систему звичайних диференціальних рівнянь, які набувають вигляду

$$\begin{cases} A(t)\cdot x'(t) = \varphi(t, x(t)) \\ C\cdot x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{1}$$

де матриця *A(t)* – вироджена.

Особливістю цієї системи є те, що її не можна подати у вигляді

$$\begin{cases} x'(t) = A^{-1}(t)\cdot \varphi(t, x(t)) \\ C\cdot x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

із подальшим застосуванням відповідних чисельних методів, оскільки A^{-1} не існує. Крім того, за певних початкових умов розв'язок такої задачі може не бути єдиним або не існувати взагалі. Такі системи відомі як сингулярні, вироджені або диференціально-алгебричні. Їх інтенсивно вивчають, а задача Коші з виродженою матрицею є актуальною[4].

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} A\cdot x'(t) = B(t)\cdot x(t) + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{3}$$

де матриці *A* і *B* сталі, матриця *A* вироджена. Тут *f(t),* x_0 – задані *n*-вимірні вектори, *B* – матриця *(n x n)*, яка також може бути виродженою, *x(t)* – шуканий вектор-розв'язок.

Незважаючи на те, що вироджена матриця A не має оберненої, для неї існує узагальнена обернена матриця, яка має деякі властивості оберненої матриці і застосовується для розв'язання систем лінійних рівнянь. Зокрема, розглянемо випадки застосування квазіоберненої та псевдооберненої узагальнених обернених матриць. У випадку, коли матриця A невироджена, то її узагальнена обернена збігається з оберненою матрицею.

3. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

3.1. КВАЗІОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Квазіоберненою до матриці A називається матриця $A^{\#}$, яка задовольняє систему рівнянь

$$\begin{aligned} &A^{\#}AA^{\#} = A^{\#} \\ &(AA^{\#})^{\#} = AA^{\#} \\ &A^{\#}A^{l+1} = A^{l} \\ &A^{l+1}(A^{\#})^{l+1} = AA^{\#}, \end{aligned} \tag{4}$$

де l – індекс матриці A, тобто найменше з невід'ємних цілих чисел, для яких $rankA^{l+1} = rankA^{l}$.

Відомо, що рівності (4) незалежні, а квазіобернена матриця до довільної матриці A існує і єдина[4]. Її можна визначити на підставі ортогонального розкладу Шура. Отже, якщо матрицю A подати

$$A = U\begin{pmatrix} C & D \\ 0 & G \end{pmatrix}U^{*},$$

то квазіобернена матриця набуде вигляду

$$A = U\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^{*}.$$

Шукана матриця $A^{\#}$ і виконання умов на початкові дані

$$(I - AA^{\#})x_0 = \varphi(t_0),$$

де

$$\varphi(t) = (AA^{\#} - I)\sum_{i=0}^{l-1} A^{i} f^{(i)}(t),$$

дають змогу звести задачу

$$Ax'(t) = B(t)x(t) + f(t)$$

до розв'язування системи, яка розв'язується стосовно похідних

$$\begin{cases} x'(t) = A^{\#}B(t)x(t) + (I - AA^{\#})\varphi'(t) + A^{\#}f(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

3.2. ПСЕВДООБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Псевдообернена матриця A^{+} розмірності $(m \times n)$ до матриці A розмірності $(n \times m)$ – матриця, для якої виконуються рівності:

$$\begin{aligned} &1)\ AA^{+}A = A; \\ &2)\ A^{+}AA^{+} = A^{+}; \\ &3)\ (AA^{+})^{*} = AA^{+}, (AA^{+})^{2} = AA^{+}; \\ &4)\ (A^{+}A)^{*} = A^{+}A, (A^{+}A)^{2} = A^{+}A. \end{aligned} \tag{5}$$

Останні дві властивості свідчать про те, що матриці $A^{+}A$ і AA^{+} є ермітовими та інволютивними. Деколи в літературі ці дві властивості замінюють такою[1]:

$$A^{+} = UA^{*} = A^{*}V,$$

де U, V – деякі матриці.

Одним із способів визначення псевдооберненої матриці є її задання за допомогою скелетного розкладу.

Скелетний розклад матриці A розмірності (m x n) рангу r – подання її у вигляді добутку двох матриць B і C, які мають, відповідно, розмірності (m x r) і (r x n)

$$A = B \cdot C = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{pmatrix},$$

де стовпці матриці B – усі лінійно незалежні стовпці матриці A[6].

Такий розклад матриці не є єдиним, проте матриці $B^{*}B$ та CC^{*} будуть невиродженими, бо B і C мають максимально можливий ранг $r = rank\ A$.

Відомо також, що псевдообернена матриця до будь-якої матриці A існує, єдина і має зображення[1]

$$A^{+} = C^{*} \cdot (C \cdot C^{*})^{-1} \cdot (B^{*} \cdot B)^{-1} \cdot B^{*}, \tag{6}$$

де B і C – компоненти скелетного розкладу $A = B \cdot C$ матриці A.

4. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРАНЗИСТОРНОГО ПІДСИЛЮВАЧА

Алгебро-диференціальні задачі, які виникають на практиці, досить часто формулюються в напів'явній формі

$$\begin{aligned} u' &= f(t,u) \\ 0 &= g(t,u), \end{aligned} \tag{7}$$

а набувають вигляду $Mu' = \varphi(u)$, де M – вироджена матриця.

Як приклад подамо обчислення підсилювача [5], зображеного на рис. 1, де $U_e(t)$ – напруга на вході; U_b – робоча напруга; $U_e(t)\ (i = 1,2,3,4,5)$ – потенціали у вузлах 1, 2, 3, 4, 5; $U_5(t)$ – напруга на виході.

Струм через опір задовольняє закон

$$I = \frac{U}{R}$$

(Ом, 1827), а через ємність –

$$I = C\frac{dU}{dt},$$

де R і C – константи, U – напруга.

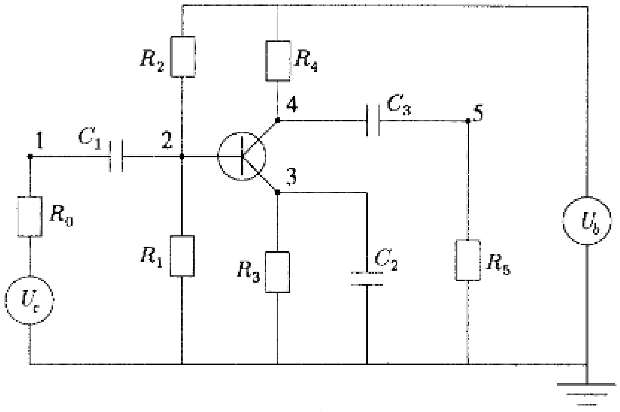

Рис. 1. Транзисторний підсилювач

Дія транзистора як підсилювача полягає в тому, що струм між вузлами 4 і 3 в 99 разів більший, нім струм між вузлами 2 і 3, до того ж він залежить від різниці потенціалів $U_3 - U_2$ нелінійно.

Закон Кірхгофа стверджує: сума струмів, спрямованих до вузла електричного з'єднання (додатні струми), і сума струмів, спрямованих від вузла (від'ємні струми), дорівнює нулю.

Застосування цього закону до рис.1 дасть підстави отримати такі рівняння.

$$\begin{aligned}
&\text{Вузол 1:}\quad \frac{U_e(t)}{R_0} - \frac{U_1}{R_0} + C_1\left(U_2' - U_1'\right) = 0.\\
&\text{Вузол 2:}\quad \frac{U_b}{R_2} - U_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + C_1\left(U_1' - U_2'\right) - 0.01 f\left(U_2 - U_3\right) = 0.\\
&\text{Вузол 3:}\quad f\left(U_2 - U_3\right) - \frac{U_3}{R_3} - C_2 U_3' = 0.\\
&\text{Вузол 4:}\quad \frac{U_b}{R_4} - \frac{U_4}{R_4} + C_3\left(U_5' - U_4'\right) - 0.99 f\left(U_2 - U_3\right) = 0.\\
&\text{Вузол 5:}\quad -\frac{U_5}{R_5} + C_3\left(U_4' - U_5'\right) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Константи набувають значень, які подано у праці (Рентроп, Рош і Штайнебах, 1989) для аналітичної задачі

$$f(U) = 10^{-6}\left(\exp\left(\frac{U}{0.026}\right) - 1\right),$$

$$R_0 = 1000\,,\quad R_1 = \ldots R_5 = 9000\,,$$

$$C_k = k \cdot 10^{-5}\,,\quad k = 1,2,3.$$

Вхідний сигнал задають у вигляді

$$U_e(t) = 0.4 \cdot \sin(200\pi t).$$

Рівняння (8) набувають вигляду

$$Mu' = \varphi(u),$$

де

$$M = \begin{pmatrix} -C_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_3 & C_3 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & -C_3 \end{pmatrix}.$$

Узгоджені початкові значення мають задовольняти рівняння

$$\varphi_1(u) + \varphi_2(u) = 0,$$
$$\varphi_4(u) + \varphi_5(u) = 0.$$

Визначивши $U_2(0) = U_3(0)$, отримаємо $f(U_2(0) - U_3(0)) = 0$. Оскільки $U_e(0) = 0$, то можна легко знайти узгоджену початкову умову вигляду

$$U_1(0) = 0,$$
$$U_2(0) = U_3(0) = \frac{U_b R_1}{R_1 + R_2},$$
$$U_4(0) = U_b,$$
$$U_5(0) = 0.$$

У цьому випадку квазіобернена матриця набуде вигляду

$$A^{\#} = 10^4 \begin{pmatrix} -2.5 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & -2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8333 & 0.8333 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8333 & -0.8333 \end{pmatrix},$$

а псевдообернена матриця подається у формі

$$A^{+} = 10^4 \begin{pmatrix} -2.5 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & -2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8333 & 0.8333 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8333 & -0.8333 \end{pmatrix}.$$

4.1. ЧИСЛОВИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

У початковий момент напруга змінювалася за законом

$$U_e(t) = 0.4 \cdot \sin(200\pi t).$$

Зміну напруги зображено на рис. 1 (U_before). Підключимо транзисторний підсилювач до контуру. На підставі виконаних перетворень і методу Рунге-Кутте четвертого порядку, складено програму, яка обчислює напругу, отриману за допомогою транзисторного підсилювача.

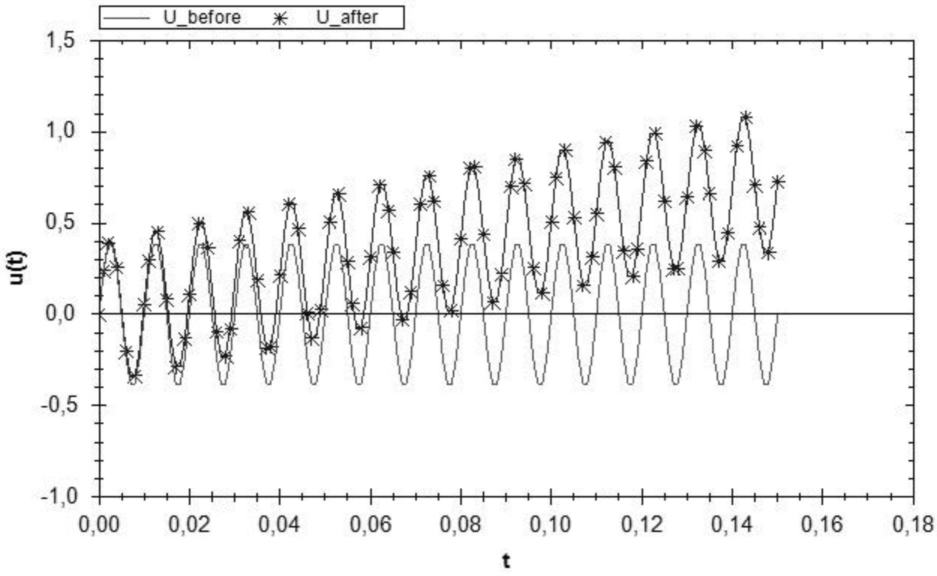

Рис. 2. Графіки напруги на вході та виході

Таблиця 1

Чисельні результати

T	U_before	U_after	Difference
0	0	0	0
0,018	-0,3804	-0,2821	0,0983
0,036	-0,2351	-0,0416	0,1935
0,054	0,2351	0,5208	0,2857
0,072	0,3804	0,7552	0,3748
0,09	0	0,461	0,461
0,108	-0,3804	0,164	0.5444
0,126	-0,2351	0.3899	0,625
0,144	0,2351	0,9381	0,703
0,15	0	0,7284	0,7284

5. ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ РОЗВИТКУ БАГАТОГАЛУЗЕВОЇ ЕКОНОМІКИ

Розглянемо економічну систему, яка складається з n галузей. Вважатимемо, що кожна галузь виробляє єдиний продукт і кожен продукт виробляє єдина галузь. Частина валового продукту кожної з галузей витрачається на виробниче споживання самої галузі та інших галузей, тобто галузі взаємодіють між собою. Також не будемо враховувати експортно-імпортних операцій і створення виробничих запасів.

Основні рівняння	*Додаткові рівності*
$X(t) = A(X,K,t)\cdot X(t) + Y(t)$	$C(t) = \tilde{C}(t)\cdot L(t)$
$Y(t) = I^*(t) + C(t)$	$\tilde{C}(t) = c_0 e^{\eta(t-t_0)} + c_1(t-t_0)$
$\dfrac{dK}{dt} = I(t) - \mu(t)\cdot K(t)$	$L(t) = L_0 e^{\xi(t-t_0)}$
$I^*(t) = s(t)\cdot Y(t)$	$I(t) = D^{*T}(t)\cdot I^*(t)$

Детальніше опишемо її складові.

Вектори

- *X(t)* – валовий продукт;
- *Y(t)* – кінцевий продукт;
- *I(t)* – інвестиції, які віддають одні галузі виробництва в інші галузі;
- $I^*(t)$ – інвестиції, які отримують одні галузі виробництва з інших галузей;
- *C(t)* – невиробниче споживання;
- $\tilde{C}(t)$ – споживання на душу населення;
- *K(t)* – основні виробничі фонди (капітал);
- *L(t)* – трудові ресурси, задіяні у виробництві.

Матриці

- *A(X,K,t)* – матриця коефіцієнтів прямих затрат *i*-ї галузі на *j*-ту;
- $D^*(t)$ – частка інвестицій *i*-ї галузі в *j*-ту;
- $\mu(t)$ (діагональна) – амортизація;
- $s(t)$ (діагональна) – норма накопичення капіталу[3].

Такий вигляд має ця модель у блочно - матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & I & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ K' \\ I^{*\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-I & I & & \\ & -I & & I \\ & & -\mu & D^{*T} \\ & s & & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ K \\ I^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ C \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

У випадку n = 2 матриця *A* зображена як

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

а квазіоберена та псевдообернена матриці збігаються з вихідною.

5.1. ЧИСЛОВИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Нехай значення коефіцієнтів відповідних параметрів моделі такі:

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0.68214 & 0 \\ 0 & 0.75346 \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} 0.06 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1800 \\ 900 \end{pmatrix}, c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

$$\eta = 0.001,\ \xi = 0.01,\ L_0 = 60.$$

Програма реалізовує неявний чотиристадійний метод Лобатто шостого порядку точності з адаптивним вибором кроку.

Параметри програми такі:

$$a = 0,\ b = 10,\ \varepsilon = 10^{-6}\ .$$

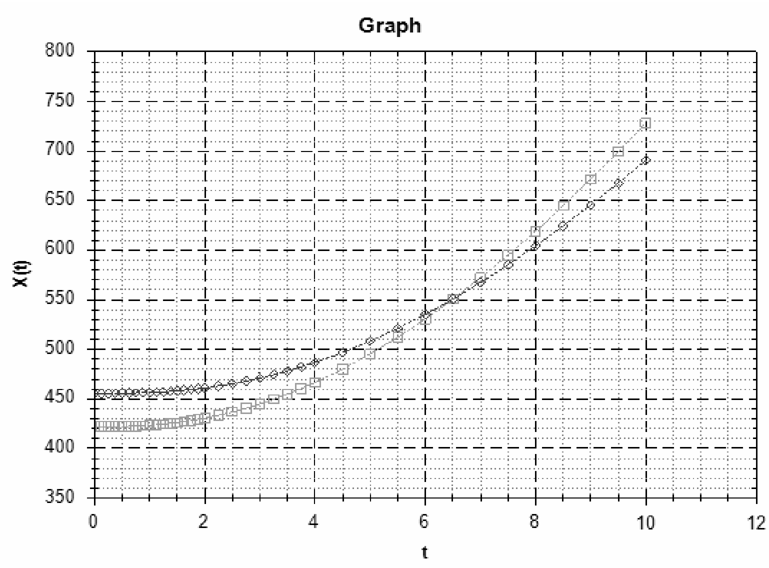

Рис. 3. Графік динаміки валового продукту для обидвох галузей

Таблиця 2

Чисельні результати

Y_1	Y_0	Y_1
0	455	422
2	460,9006	430,4938
4	486,7107	466,6442
6	535,3071	530,7026
8	604,421	619,2082
10	690,871	728,4865

6. ВИСНОВКИ

Розглянуто проблему знаходження розв'язку задачі Коші з постійною виродженою матрицею при похідних. Для цього вводиться поняття квазіоберненої матриці, яку визначають на підставі ортогонального розвинення Шура, та псевдооберненої матриці, яку можна знайти за допомогою скелетного розкладу.

Оскільки розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь зводиться до розв'язування різницевих схем, то було адаптовано метод Рунге-Кутта та метод Лобатто для роботи з відповідними матрицями, врахувавши теорію про узагальнені обернені матриці.

Для практичної реалізації обрали фізичну модель транзисторного підсилювача та динамічну модель розвитку багатогалузевої економіки. У загальному випадку квазіобернена та псевдообернена матриці є різними. Проте виявилося, що для вибраних моделей квазіобернена та псевдообернена матриці збігаються, а отже, збігаються й отримані розв'язки.

Отримані результати мають важливе теоретичне та практичне значення. Вони доповнюють і розширюють існуючі результати з теорії аналізу вироджених систем звичайних диференціальних рівнянь. Практичне значення одержаних результатів полягає в можливості їх застосування до розв'язування конкретних задач фізики, економіки, екології, математичні моделі яких зводяться до систем такого типу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бояринцев Ю.Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М : Наука, 1966. – 576 с.
3. *Іванків К.С.* Математичне моделювання біологічних та еколого-економічних процесів / К.С. Іванків, М.В. Щербатий. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. – 154 с.
4. *Штыкель Т.Л.* К теории вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Т.Л. Штыкель // Сиб. мат. журн. – 1995. – Т. 36, № 5.
5. *Хайрер Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер Пер. с англ. – М.: Мир, 1999.
6. *Kress R.* Numerical analysis / Rainer Kress. – New-York, 1998.

Стаття: надійшла до редколегії 14.10.2015
доопрацьована 11.11.2015
прийнята до друку 25.11.2015

INVESTIGATION OF DEGENERATE SYSTEMS OF DIFFERENTIALEQUATIONS USING GENERALIZED INVERSE

O. Kossak , I. Boretska, O. Dovhanyk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kpm@lnu.edu.ua

The possibility of applying quasiinverse and pseudoinverse generalized inverse matrices for finding an approximate solution of the Cauchy problem for degenerate systems of ordinary differential equations with constant matrix near the vector of derivatives is under consideration. Comparison of results obtained using quasiinverse and pseudoinverse matrices is based on the transistor amplifier model and dynamic model of diversified economy.

Key words: singular system of ordinary differential equations, differential-algebraic system, generalized matrix inverse, pseudoinverse matrix, quasiinverse matrix, transistor amplifier model, dynamic model of diversified economy.