

КУСКОВО-СТЕПЕНЕВІ АПРОКСИМАЦІЇ МСЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ-РЕАКЦІЇ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Аркадій Кіндибалюк, М. Притула

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000*

Для сингулярно-збуреної крайової задачі для рівняння адвекції-дифузії-реакції з розривними коефіцієнтами запропоновано схему методу скінченних елементів з кусково-степеневими базисними функціями. Визначено значення параметра стабілізації варіаційної задачі та подано рекомендації для його відшукування. Наведено результати обчислювальних експериментів та проаналізовано переваги запропонованої схеми методу скінченних елементів для цього класу задач.

Ключові слова: метод скінченних елементів, сингулярно-збурена задача, стабілізовані схеми, кусково-степеневі базисні функції, кусково-степенева апроксимація.

1. ВСТУП

Моделювання міграції домішок [8] у неоднорідному пористому середовищі є важливою проблемою, яка виникає в багатьох інженерних задачах: видобуток нафти, прогнозування землетрусів, захоронення ядерних відходів, моделювання водоносного горизонту ґрунтових вод тощо [12].

У цих задачах розрахункова область часто складається з декількох областей, у яких фізичні властивості суттєво відрізняються. У математичній моделі це описується диференціальними рівняннями з розривними коефіцієнтами. Фізичні, геологічні та хімічні властивості середовища можуть призвести до виродження коефіцієнта дифузії у математичних рівняннях, які описують модель.

Класичні обчислювальні схеми породжують нестійкість розв'язку навіть у невивродженому випадку, коли коефіцієнт дифузії достатньо малий порівняно з коефіцієнтом адвекції. У такій ситуації відношення коефіцієнта адвекції до коефіцієнта дифузії достатньо велике, що спричиняє гіперболічну поведінку розв'язку, а наблизений розв'язок не здатний відтворити феномен примежового шару і, у підсумку, виникають неприродні осциляції розв'язку. Навіть, якщо дані задачі досить регулярні, то за допомогою класичної обчислювальної схеми неможливо розпізнати наявність малого, або, можливо, нульового коефіцієнта дифузії. Хоча цей недолік можна усунути шляхом уточнення сітки, проте такий підхід призводить до значного збільшення обчислювальних затрат.

Тобто, рівняння з розривними коефіцієнтами дискретизують з використанням класичних методів скінченних елементів і методу скінченних різниць, які зазвичай використовують техніку розщеплення оператора для окремого обчислення коефіцієнтів дифузії та адвекції [10, 21]. Такі схеми часто використовують процедуру обмеження кутового нахилу для зменшення кількості нефізичних осциляцій, а також включення стабілізуючого доданка [16]. У [11, 19, 22] застосовано метод декомпозиції області з використанням різних обчислювальних схем на окремих

підобластях і розривний метод Гальоркіна. Інші підходи, наприклад, протипотокова схема типу Енгкуїста-Ошера, Робін-Робіна опрацьовані у [13, 18].

Оскільки для розв’язування таких задач використовують також стабілізаційні схеми, то ми досліджуємо обчислювальні схеми МСЕ з використанням базисних функцій, які мають стабілізуючий ефект [20]: кусково-експоненціальні [9, 14, 15, 17] та кусково-степеневі базисні функції [1–7].

Мета нашої праці – побудувати та проаналізувати обчислювальні схеми МСЕ на підставі кусково-степеневих апроксимацій [1–7]. Доведемо, що за рахунок специфічної структури кусково-степеневих апроксимацій, наближений розв’язок адекватно відображає фізичний процес.

Стаття побудована так: модельну задачу сформульовано у п. 2, важливі теоретичні твердження наведено у п. 3, на підставі кусково-степеневих базисних функцій систему лінійних алгебричних рівнянь схеми МСЕ отримано у п. 4. У п. 5. подано рекомендації стосовно вибору значення параметра стабілізації для різного типу задач міграції домішок, у тім числі і для часткових випадків. Наведені числові результати у п. 6 свідчать про ефективність застосування кусково-степеневих апроксимацій.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглядаємо крайову задачу для рівняння адвекції-дифузії реакції

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ Lu := -(\mu u')' + \beta u' + \sigma u = f, \text{ в } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де функції $\mu = \mu(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ мають розриви першого роду, причому функція $\mu(x)$ задовольняє умову $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$, де μ_0 – довільне додатне число. Варіаційне формулювання задачі (1) набуває вигляду

$$\begin{cases} \text{задано простір } V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\}, \\ \text{знайти елемент } u \in V \text{ такий, що} \\ a(u, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in V, \end{cases} \quad (2)$$

де структурні елементи задачі (2) набули вигляду

$$a(u, v) = \int_0^1 (\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv) dx, \quad \langle l, v \rangle = \int_0^1 f v dx.$$

Вважаємо, що дані задачі (2) задовольняють умови коректності.

3. КУСКОВО-СТЕПЕНЕВІ АПРОКСИМАЦІЇ МСЕ

Зафіксуємо натуральне число N і поділимо відрізок $[0,1]$ на інтервали $K_{i+1/2} := (x_i, x_{i+1})$ довжини $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i > 0$, $i = 0, \dots, N-1$. Дробовим індексом позначаємо номер інтервалу і певні його характеристики. Наприклад, $x_{i+1/2} = 1/2(x_{i+1} + x_i)$ – центр ваги інтервалу $K_{i+1/2} := (x_i, x_{i+1})$, $\{u(x)\}_{i+1/2} = u_{i+1/2}$ – значення функції $u(x)$ у точці $x = x_{i+1/2}$.

Нехай задано достатньо регулярну функцію $u = u(x)$. Для довільного $\alpha > 0$ на кожному з інтервалів виберемо апроксимаційний поліном у вигляді лінійної комбінації

$$u(x) \approx u_{I, i+1/2}(x, \alpha_{i+1/2}) = u(x_i)\varphi_i(x, \alpha_{i+1/2}) + u(x_{i+1})\varphi_{i+1}(x, \alpha_{i+1/2}) \quad \forall x \in \bar{K}_{i+1/2}, \quad (3)$$

$$i = 0, \dots, N-1$$

степеневих функцій

$$\begin{cases} \varphi_i(x, \alpha_{i+1/2}) = 1 - (\omega_i(x))^{\alpha_{i+1/2}}, \\ \varphi_{i+1}(x, \alpha_{i+1/2}) = 1 - \varphi_i(\alpha_{i+1/2}, x), \end{cases} \quad (4)$$

де локальна координата набуває вигляду $\omega_i = (x - x_{i-1})/h_{i+1/2}$, а стала $\alpha_{i+1/2} > 0$ відіграє роль параметра апроксимації та стабілізації [2] для задачі (2).

Якщо задана функція $u \in C([0, 1])$, то кусково-визначена функція $u_I(x, \alpha)$ у (3) буде також кусково-визначеною на відрізку $[0, 1]$ і її можна подати у вигляді

$$u_I(x, \alpha) = \sum_{i=0}^N u_i \phi_i(x, \alpha_{i+1/2}) \quad \forall x \in [0, 1], \quad (5)$$

де базис інтерполяції набуває вигляду

$$\begin{aligned} \text{supp } \phi_0 &= \bar{K}_{1/2}, \quad \phi_0(x) = 1 - (\omega_1(x))^{\alpha_{1/2}}, \\ \text{supp } \phi_i &= \bar{K}_{i-1/2} \cup \bar{K}_{i+1/2}, \quad \phi_i(x) = \begin{cases} (\omega_i(x))^{\alpha_{i-1/2}}, & x \in \bar{K}_{i-1/2}, \\ 1 - (\omega_{i+1}(x))^{\alpha_{i+1/2}}, & x \in \bar{K}_{i+1/2}, \end{cases} \quad i = 1, N-1, \\ \text{supp } \phi_N &= \bar{K}_{N-1/2}, \quad \phi_N(x) = (\omega_N(x))^{\alpha_{N-1/2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для величин, які характеризують середнє значення апроксимації $u_{i+1/2}(\alpha; x)$ та швидкості її зміни на скінченному елементі $K_{i+1/2}$, введемо позначення

$$\begin{cases} u_{i+1/2} = 1/2(u_{i+1} + u_i), \\ \dot{u}_{i+1/2} = (u_{i+1} - u_i)/h_{i+1/2}. \end{cases}$$

Лінійну незалежність та апроксимаційні властивості кусково-степеневих апроксимацій доведено у [3].

Враховавши крайові умови варіаційної задачі, отримуємо, що $u_0 = u_N = 0$, отже, кусково-визначену степеневу апроксимацію (5) запишемо у вигляді

$$u_h(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \phi_i(x, \alpha_{i+1/2}) \quad \forall x \in [0, 1], \quad (7)$$

де $\{u_i\}_{i=1}^{N-1}$ – коефіцієнти, які потрібно знайти.

Вважаємо, що система кусково-визначених функцій (6) формує базис у скінченновимірному просторі $V_h \subset V$, причому $\dim V_h = N$. Дискретне формулювання задачі набуває вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано триангуляцію } T_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^N \text{ та пов'язаний з нею} \\ \text{простір кусково – степеневих апроксимацій } V_h \subset V, \\ \text{знайти розв'язок } u_h \in V_h \text{ рівняння} \\ a(u_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V_h. \end{array} \right. \quad (8)$$

4. СТРУКТУРА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ МСЕ

Вибравши у рівнянні (8) по чергово $v = \varphi_i$, $\varphi_i \in V_h$, $i = \overline{1, N}$, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), де матриця A визначена за правилом $A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $i, j = \overline{1, N}$, а права частина набула вигляду $F_i = \langle l, \varphi_i \rangle$, $i = \overline{1, N}$.

Використовуючи теорему про середнє [9], допоміжні обчислення на скінченному елементі [1] та властивості кусково-степеневих функцій у просторі $L^2(\Omega)$ [3], отримаємо наближення на скінченному елементі $K_{i+1/2}$

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mu u' v' + \beta u v + \sigma u v dx \approx \\ &\approx \mu(x_{k+1/2}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} u' v' dx + \beta(x_{k+1/2}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} u v dx + \sigma(x_{k+1/2}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} u v dx, \\ \langle l, v \rangle &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} f v dx \approx f(x_{i+1/2}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} v dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Теорема 1 (про структуру системи рівнянь МСЕ з кусково-степеневим базисом). Для розв'язування коректно-сформульованої варіаційної задачі (2) на поділі $T_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^N$ введемо простір апроксимацій V_h , де базисні елементи $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ цього простору є кусково-неперервні степеневі функції вигляду (4). Нехай обчислення білінійної форми та лінійного функціонала виконано згідно з (9). Тоді система лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для знаходження коефіцієнтів апроксимації (7) матиме вигляд

$$\begin{aligned} &\left\{ -\frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i-1/2} u_{i-1} + \\ &+ \left(\left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \frac{2\alpha^2}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i-1/2} + \left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \frac{1}{1+2\alpha} \right\}_{i+1/2} \right) u_i + \\ &+ \left\{ -\frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i+1/2} u_{i+1} = \left\{ h f \frac{1}{\alpha+1} \right\}_{i-1/2} + \left\{ h f \frac{\alpha}{\alpha+1} \right\}_{i+1/2}, \end{aligned} \quad (10)$$

де $u_0 = u_N = 0$, $i = \overline{1, N-1}$.

Доведення. Правильність теореми випливає з допоміжних обчислень (9) на скінченному елементі та властивостей кусково-степеневих базисних функцій [1, 3].

Теорема 2 (про структуру системи рівнянь МСЕ з кусково-степеневим базисом на рівномірній сітці зі сталими коефіцієнтами). Нехай виконано умови теореми 1, а

також кожен скінченний елемент є однакового діаметра, тобто $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$, $i = 0, N$ та функції μ , β , σ , f сталі на відрізьку $[0, 1]$.

Тоді система лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для знаходження коефіцієнтів апроксимації (7) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right) u_{i-1} + \\ & + \left(\frac{2\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \left(\frac{2\alpha^2}{1+3\alpha+2\alpha^2} + \frac{1}{1+2\alpha} \right) \right) u_i + \\ & + \left(-\frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} - \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right) u_{i+1} = hf, \end{aligned} \quad (11)$$

що рівносильно

$$\left(-\mu \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{\sigma h^2}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right) \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right) + \beta \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) + \sigma u_i = f_i \quad (12)$$

Форма запису (12) системи лінійних алгебричних рівнянь (11) методу скінченних елементів відображає його відмінність від методу скінченних різниць, який безпосередньо замінює похідні вихідного диференціального рівняння крайової задачі (2) відповідними різницевиими співвідношеннями з точністю до порядку $O(h^2)$.

5. ПАРАМЕТР СТАБІЛІЗАЦІЇ

Регулюючи значення параметра α , можна отримувати обчислювальні схеми з різними властивостями. У [2] доведено, що для задачі адвекції-дифузії зі сталими коефіцієнтами за вибору значення параметра

$$\alpha_h = \frac{Peh}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{Peh}{2} \right) + \sqrt{\frac{Peh}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{Peh}{2} \right) \left(\frac{Peh}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{Peh}{2} \right) - 1 \right)},$$

обчислювальна схема дає змогу обчислити точні значення у вузлах сітки, оскільки вона збігається зі схемою Ільїна-Аллена-Саусвела. Далі розглянено знаходження параметра стабілізації з умови коректності схеми [1]. Параметр стабілізації визначаємо з умови М-критерію. Оптимальне значення параметра стабілізації для часткового випадку $\sigma(x) = 0$, $\mu(x) = 1$, $\beta(x) = Pe > 0$ знайдено у [1, 5]

$$\alpha_h = \max \left\{ 1, \frac{hPe}{2} + \sqrt{\frac{hPe}{2} \left(\frac{hPe}{2} - 1 \right)} \right\},$$

і доведено, що матриця схеми МСЕ з так вибраним параметром стабілізації є М-матрицею [2].

Для часткового випадку (задача дифузії-реакції) у [7] визначено параметр стабілізації, який набуває вигляду

$$\alpha_h = -\frac{1}{2} + \frac{1+4h^2S}{2^{2/3}\lambda^{2/3}} + \frac{\lambda^{2/3}}{6 \cdot 2^{2/3}},$$

де h – діаметр скінченного елемента, а число λ має такий вигляд:

$$\lambda = -216h^2S + \sqrt{46656h^4S^2 - 108(1+4h^2S)^3}.$$

Тут число $S = \mu^{-1}\sigma$. Зазначимо, що таке задання параметра стабілізації громіздке, тому подамо його оптимальне значення з погляду обчислювальних затрат.

Теорема 3 (про оптимальне значення параметра стабілізації для задачі адвекції-дифузії-реакції з кусково-степеневим базисом). Для розв’язування коректно-сформульовану варіаційну задачу (2) на поділі $T_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^N$ введено простір апроксимацій V_h , де базисні елементи $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ цього простору кусково-неперервні степеневі функції вигляду (4). Припускаємо, що обчислення білінійної форми та лінійного функціонала виконано згідно з (9). Тоді за умови вибору значення параметра стабілізації

$$a_{h,i+1/2} = \max \left\{ 1, \frac{h|\beta|}{|\mu|} + \frac{h^2\sigma^2}{|\mu|} + \sqrt{\left(\frac{h|\beta|}{|\mu|} + \frac{h^2\sigma^2}{|\mu|} \right) \left(\frac{h|\beta|}{|\mu|} + \frac{h^2\sigma^2}{|\mu|} - 1 \right)} \right\}_{i+1/2} \quad (13)$$

на кожному скінченному елементі отримаємо монотонну схему, при якій розв’язок задачі (2) стійкий.

Доведення. Щоб розв’язок задачі (2) був стійким, необхідно, щоб матриця для визначення коефіцієнтів апроксимації була M -матрицею. Тобто усі діагональні елементи мають бути строго більші за нуль, а позадіагональні елементи – менші або дорівнювати нулю. Ця умова забезпечує монотонність схеми. Система (10) стосовно вузла u_i набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \left(\left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \frac{2\alpha^2}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i-1/2} + \left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \frac{1}{1+2\alpha} \right\}_{i+1/2} \right) u_i = \\ & \left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} - \frac{\beta}{2} - \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i-1/2} u_{i-1} + \left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{\beta}{2} - \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i+1/2} u_{i+1} + \\ & + \left\{ h f \frac{1}{\alpha+1} \right\}_{i-1/2} + \left\{ h f \frac{\alpha}{\alpha+1} \right\}_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Припустимо, що $\beta(x) \geq 0$, $\sigma(x) \geq 0$, $\forall x \in K_{i+1/2}$, тоді вираз

$$\left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \frac{2\alpha^2}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i-1/2} + \left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \frac{1}{1+2\alpha} \right\}_{i+1/2}$$

буде строго додатним.

Нас цікавлять знаки виразів при u_{i-1} та u_{i+1} . Нехай

$$\frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} - \frac{\beta}{2} - \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} = 0, \quad \text{тоді} \quad \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{\beta}{2} - \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} > 0. \quad \text{У підсумку}$$

отримуємо нерівність для визначення параметра стабілізації

$$\left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} - \frac{\beta}{2} - \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i+1/2} \geq 0. \quad (14)$$

Розв’язок нерівності (14) задається громіздким виразом, тому спростимо її.

Оскільки $\alpha \geq 1$, то справджується оцінка $\frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \leq \frac{\sigma h}{6}$. Тоді розв’язком

нерівності $\left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} - \frac{\beta}{2} - \frac{\sigma h}{6} \right\}_{i+1/2} \geq 0$ є множина значень

$$a_{h,i+1/2} \geq \left\{ \frac{h\beta}{\mu} + \frac{h^2\sigma^2}{\mu} + \sqrt{\left(\frac{h\beta}{\mu} + \frac{h^2\sigma^2}{\mu} \right) \left(\frac{h\beta}{\mu} + \frac{h^2\sigma^2}{\mu} - 1 \right)} \right\}_{i+1/2}.$$

За припущенням коефіцієнти задачі були більші або дорівнювали нулю, тому для загального випадку замінимо значення цих коефіцієнтів їхніми модулями. У [1] доведено, що мінімальна похибка досягається тоді, коли значення параметра стабілізації є найменшим з множини значень параметрів, при яких забезпечується коректність схеми, тому значення параметра стабілізації вибрано у вигляді (13).

Доведемо існування альтернативного способу визначення параметра стабілізації для диференціального оператора L задачі (1). Визначимо значення параметра стабілізації з умови

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (L\varphi_i(x, \alpha))^2 dx = 0,$$

або

$$\begin{cases} \text{задано функціонал } I(\alpha) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (L\varphi_i(x, \alpha))^2 dx, \\ \text{знайти значення } \alpha_* \text{ таке, що } I(\alpha_*) \leq I(\alpha), \forall \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Для задачі адвекції-дифузії значення параметра стабілізації набуло вигляду

$$a_h = \frac{1}{6} \left[(5 + 4hPe) + \frac{-1 + 8hPe - 4h^2Pe^2}{\sqrt[3]{\lambda_h}} + \sqrt[3]{\lambda_h} \right],$$

де $\lambda_h = -1 - 42hPe + 24h^2Pe^2 - 8h^3Pe^3 + 6\sqrt[3]{3} \sqrt{hPe + 14h^2Pe^2 - 12h^3Pe^3 + 4h^4Pe^4}$.

Правильність описаного підходу підтверджує те, що для рівняння Пуассона з (1) ($\beta(x) = 0, \sigma(x) = 0, x \in \Omega$) значення параметра стабілізації α_h , визначене за вищерозглянутою схемою, становить $\alpha_h = 1$, позаяк для такої задачі оптимальним типом апроксимацій з класу функцій з двома вузлами інтерполювання є кусково-лінійні апроксимації.

6. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Приклад 1. Розглянемо модельну крайову задачу адвекції-дифузії з розривним коефіцієнтом адвекції

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + \beta(x)u' = 1000 \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

де коефіцієнт адвекції задано за правилом

$$\beta(x) = \begin{cases} 1000, & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 10^{-8}, & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

Особливістю задачі (15) є те, що коефіцієнт адвекції розривний, а також точний розв’язок для задачі (15) невідомий. З огляду на таку обставину розглядатимемо апостеріорні оцінки похибок.

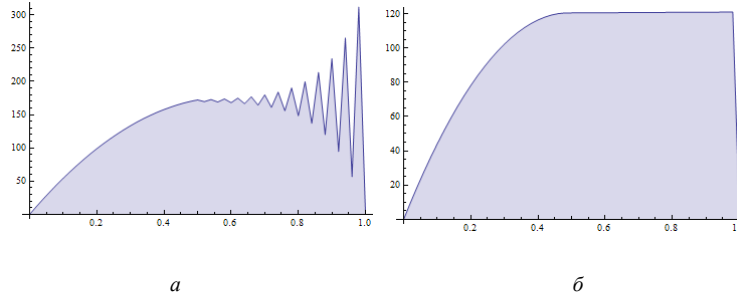


Рис. 1. *а*) Наближений розв’язок, який отримали з використанням лінійних базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів $N = 50$; *б*) розв’язок, який отримали з використанням степеневих та експоненціальних базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів $N = 50$

Як видно з рис. 1. *а, б*, степеневі базисні функції можуть досить точно відтворити структуру розв’язку навіть на сітці з п’ятдесяти скінченних елементів, тоді як розв’язок з використанням лінійних базисних функцій демонструє неприродні осциляції майже у всій досліджуваній області.

Значення параметра стабілізації на кожному скінченному елементі вибирали з умов коректності обчислювальної схеми та з урахуванням даних задачі.

Подамо норми похибок апроксимацій різного типу стосовно точного розв’язку задачі (1) в просторі $V = H_0^1(\Omega)$. Нехай $u_{h,1}$ – апроксимація наближеного розв’язку, яку отримали з використанням лінійних базисних функцій на кроці h , $u_{h,E}$ – апроксимація розв’язку, отримана з використанням лише експоненціальних базисних функцій на кроці h , $u_{h,\alpha}$ – апроксимація розв’язку, яку одержали з використанням кусково-степеневих базисних функцій на кроці h . Крім того, норму в просторі $V = H_0^1(\Omega)$ обчислюємо так: $\|u\|_V^2 = \int_{\Omega} (u')^2 dx$.

Порядок збіжності обчислюємо за формулою $p_h = \log_2 \left(\frac{\|v_h - v_{h/2}\|_V}{\|v_{h/2} - v_{h/4}\|_V} \right)$ [8, 9].

Значення похибок у нормі простору $L^2(\Omega)$ наведено у табл. 1, значення похибок у нормі простору V у табл. 2, а порядки збіжності у нормі простору $L^2(\Omega)$ та простору V наведено, відповідно, у табл. 3 і 4.

Таблиця 1

Норми похибок апроксимацій у нормі простору $L^2(\Omega)$ для лінійних,
експоненціальних і степеневих апроксимацій

Крок h	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/40	62.118	2.65612	6.77624
1/80	10.1977	1.32737	3.92125
1/160	4.20887	0.688323	1.69361
1/320	1.39902	0.732757	0.436301
1/640	0.407374	0.740838	0.407374
1/1280	0.12464	0.504241	0.12464
1/2560	0.0464207	0.286745	0.0464207
1/5120	0.0207453	0.151742	0.0207453
1/10240	0.0100505	0.0778925	0.0100505
1/20480	0.00498695	0.039442	0.00498695

Таблиця 2

Норми похибок апроксимацій у нормі простору V

Крок h	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _V$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _V$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _V$
1/40	2907.01	106.194	2453.8
1/80	3562.34	104.368	2265.83
1/160	2926.7	168.413	1725.9
1/320	1917.74	752.256	898.332
1/640	1058.38	1619.1	1058.38
1/1280	544.479	2219.48	544.479
1/2560	274.33	2528.25	274.33
1/5120	137.45	2677.13	137.45
1/10240	68.7656	2749.18	68.7656
1/20480	34.3891	2784.48	34.3891

Таблиця 3

Порядки збіжності у нормі простору $L^2(\Omega)$

p_h при h	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1	2	3	4
1/40	2.60677	1.00075	0.789169

1	2	3	4
1/80	1.27674	0.947412	1.21122
1/160	1.58901	-0.0902487	1.9567
1/320	1.77999	-0.0158237	0.0989716
1/640	1.70859	0.555046	1.70859
1/1280	1.42492	0.814343	1.42492
1/2560	1.16198	0.918155	1.16198
1/5120	1.04553	0.962059	1.04553
1/10240	1.01103	0.981753	1.01103

Таблиця 4

Порядки збіжності у нормі $H_0^1(\Omega)$

p_h при h	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _V$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _V$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _V$
1/40	-0.293288	0.0250247	0.114979
1/80	0.28355	-0.690327	0.39269
1/160	0.609863	-2.15922	0.942029
1/320	0.857549	-1.1059	-0.236541
1/640	0.958913	-0.455027	0.958913
1/1280	0.988963	-0.187918	0.988963
1/2560	0.997008	-0.0825493	0.997008
1/5120	0.999146	-0.0383118	0.999146
1/10240	0.999734	-0.018407	0.999734

З наведених результатів випливає, що зі згущенням сітки порядки збіжності степеневих апроксимацій постійно зростають, прямуючи до величин передбачених теоретичним аналізом похибки.

Приклад 2. Розглянемо модельну крайову задачу адвекції-дифузії з розривним коефіцієнтом адвекції

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + \beta(x)u' = 1000 \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

де коефіцієнт адвекції задано за правилом

$$\beta(x) = \begin{cases} 10^{-8}, & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 1000, & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

Особливістю задачі (16) є те, що коефіцієнт адвекції є розривним, а також точний розв'язок для задачі (16) невідомий. З огляду на таку обставину розглядатимемо апостеріорні оцінки похибок.

На рис. 2 зображено графіки наближеного розв'язку для двадцяти скінченних елементів. На рис. 2, а зображено графік, який отримали з використанням лінійних базисних функцій МСЕ, а на рис. 2, б зображено графік, який отримали з використанням степеневих базисних функцій МСЕ.

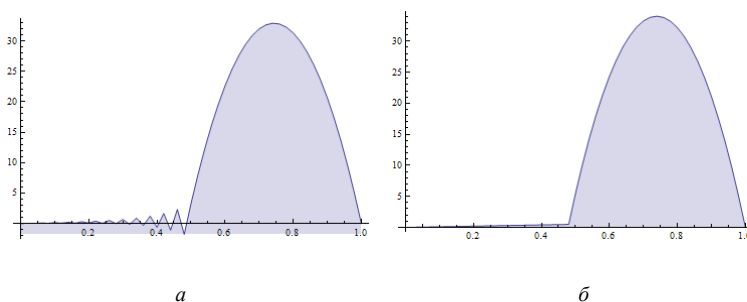


Рис. 2. а) Наближений розв'язок, який отримали з використанням лінійних базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів $N = 50$; б) розв'язок, який отримали з використанням степеневих та експоненціальних базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів $N = 50$

Значення похибок у нормі простору $L^2(\Omega)$ наведено у табл. 5, значення похибок у нормі простору V у табл. 6, а порядки збіжності у нормі простору $L^2(\Omega)$ та простору V наведено, відповідно, у табл. 7 і 8.

Таблиця 5

Норми похибок апроксимацій у нормі простору $L^2(\Omega)$ для лінійних, експоненціальних і степеневих апроксимацій

Крок h	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/40	0.813098	5.15455×10^{14}	1.59676
1/80	0.347917	1.44019×10^{12}	0.769348
1/160	0.162448	8.37737×10^{10}	0.355117
1/320	0.0796946	1.79139×10^{10}	0.135942
1/640	0.0396721	6.27728×10^9	0.0396721
1/1280	0.019815	2.67319×10^9	0.019815
1/2560	0.00990442	1.23864×10^9	0.00990442
1/5120	0.00495165	5.96801×10^8	0.00495165
1/10240	0.00247571	2.92998×10^8	0.00247571
1/20480	0.00123783	1.45176×10^8	0.00123783

Таблиця 6

Норми похибок апроксимацій у нормі простору V

Крок h	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _V$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _V$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _V$
1/40	85.0703	2.5773×10^{17}	244.301
1/80	43.212	7.22869×10^{14}	152.892
1/160	20.9132	4.5601×10^{13}	78.5698
1/320	9.22066	1.33454×10^{13}	8.62518
1/640	3.94868	7.89177×10^{12}	3.94868
1/1280	1.76291	6.26879×10^{12}	1.76291
1/2560	0.825378	5.63837×10^{12}	0.825378
1/5120	0.398559	5.35998×10^{12}	0.398559
1/10240	0.195756	5.2291×10^{12}	0.195756
1/20480	0.0969994	5.16562×10^{12}	0.0969994

Таблиця 7

Порядки збіжності у нормі простору $L^2(\Omega)$

p_h при h	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/40	1.22469	8.48345	1.05344
1/80	1.09877	4.10362	1.11534
1/160	1.02743	2.22542	1.3853
1/320	1.00636	1.51287	1.7768
1/640	1.00153	1.23158	1.00153
1/1280	1.00045	1.1098	1.00045
1/2560	1.00016	1.05344	1.00016
1/5120	1.00007	1.02636	1.00007
1/10240	1.00003	1.01309	1.00003

Таблиця 8

Порядки збіжності у нормі $H_0^1(\Omega)$

p_h при h	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _V$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _V$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _V$
1	2	3	4
1/40	0.977223	8.47791	0.67615
1/80	1.04702	3.9866	0.960463
1/160	1.18147	1.77272	3.18735

1	2	3	4
1/320	1.2235	0.757919	1.12718
1/640	1.16341	0.332162	1.16341
1/1280	1.09483	0.152908	1.09483
1/2560	1.05026	0.0730502	1.05026
1/5120	1.02574	0.035667	1.02574
1/10240	1.01301	0.0176186	1.01301

З наведених результатів випливає, що зі згущенням сітки порядки збіжності степеневих апроксимацій постійно зростають, прямуючи до величин передбачених теоретичним аналізом похибки.

7. ВИСНОВКИ

Для сингулярно-збуреної крайової задачі для рівняння адвекції-дифузії-реакції з розривними коефіцієнтами апробовано схему методу скінченних елементів з кусково-степеневими базисними функціями. Наведено рекомендації стосовно вибору значення параметра стабілізації варіаційної задачі та подано розрахункові формули визначення параметра стабілізації. Подано результати обчислювальних експериментів, проаналізовано перевагу схеми з кусково-степеневими апроксимаціями над схемами методу скінченних елементів з кусково-лінійними та кусково-експоненціальними апроксимаціями для цього класу задач.

Розрахунки для трьох типів базисних функцій МСЕ: кусково-лінійних, кусково-експоненціальних і кусково-степеневих свідчать про те, що під час згущення сітки до деякого значення кількості скінчених елементів похибки кусково-степеневі апроксимації є менші, ніж похибки кусково-лінійної апроксимації, а після досягнення деякого значення кількості скінчених елементів, значення похибок однакові, а похибки експоненціальних апроксимацій виявилися більшими, ніж для кусково-лінійних чи кусково-степеневих апроксимацій.

Нагромадження похибок апроксимації з кусково-експоненціальними базисними функціями спричинене, з одного боку, тим, що в підобласті, де коефіцієнт адвекції малий, експоненціальні функції наближаються до лінійних апроксимацій, але для них це можливе лише в границі, з огляду на їхню конструкцію [9, 14, 15].

Поведінка кусково-степеневих базисних апроксимацій пов'язана з безпосереднім зв'язком з лінійними апроксимаціями, адже при визначенні значення параметра $\alpha = 1$ ми отримуємо класичні лінійні апроксимації. Оскільки лінійні апроксимації є граничним випадком експоненціальних апроксимацій [9], то перехід до лінійних апроксимацій відбувається для них через границю.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кіндибалюк А.А. Застосування степеневих базисних функцій МСЕ до розв'язування сингулярно збуреної задачі адвекції-дифузії / А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула // Вісн. НТШ. – 2012. – Вип. 9. – С. 140-157.
2. Киндыбалюк А. Обоснование применения степенных базисных функций метода конечных элементов к сингулярно возмущенной краевой задаче адвекции-

- диффузії / А. Кіндибалюк, Н. Притула // *Вісник Брєсцкага ўнїверсїтєта. Серыя 4. –Фїзїка. –Матэматыка.* – 2013. – № 1/2013. – С. 59-65.
3. *Кіндибалюк А.А.* Властивості кусково-степеневих апроксимацій МСЕ для сингулярно збурених задач адвекції-дифузії-реакції / А.А. Кіндибалюк, Г.А. Шинкаренко // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл.-мат.* – 2014. – Вип. 21. – С. 99-109.
 4. *Кіндибалюк А.А.* Застосування кусково-степеневих апроксимацій МСЕ для сингулярно збурених задач адвекції-дифузії-реакції / А.А. Кіндибалюк, Г.А. Шинкаренко // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл.-мат.* – 2014. – Вип. 22. – С. 60-74.
 5. *Кіндибалюк А.А.* Степеневі базисні функції МСЕ для сингулярно збуреної крайової задачі конвекції – дифузії / А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 19-21 квітня 2012 р., Київ: Матеріали конференції. – Т. 1. – С. 222.
 6. *Кіндибалюк А.А.* Розв'язування МСЕ двовимірної крайової сингулярно збуреної задачі конвекції-дифузії з використанням степеневих базисних функцій / А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула // XVIII Всеукраїнська наукова конференція Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (4-5 жовтня 2012 р. – Львів). Тези доп. С. 90-91.
 7. *Кіндибалюк А.А.* Степеневі базисні функції МСЕ для сингулярно збуреної крайової задачі дифузії-реакції / А.А. Кіндибалюк // Міжнародна наукова конференція Сучасні проблеми механіки та математики, 21-25 травня 2013 р. – Львів. – Т. 3. – С. 25-27.
 8. *Савула Я.Г.* Чисельний аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я.Г. Савула. – Львів, 2004. – 221 с.
 9. *Сінчук Ю.* Експоненціальні апроксимації МСЕ для сингулярно збурених задач конвекції-дифузії реакції / Ю. Сінчук, Г. Шинкаренко // *Вісн. Львів. ун-ту, Сер. прикл. матем. та інформ.* – 2007. – Вип. 12. – С. 157-169.
 10. *Douglas Jr.J.* Numerical methods for convection-diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures. / Jr. J. Douglas, T.F. Russell // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1982. – Vol. 19. – P. 871-885.
 11. *Frati A.* Spectral approximation to advection-diffusion problems by the fictitious interface method / A. Frati, F. Pasquarelli, A. Quarteroni // *J. comput. Phys.* – 1993. – Vol. 107. – P. 201-212.
 12. *Gander M.J.* Optimized schwarz methods for a diffusion problem with discontinuous coefficient / M.J. Gander, O. Dubois // *Numer. Algorithms*, 2014.
 13. *Gerardo-Giorda L.* A Robin-Robin preconditioner for advection-diffusion equations with discontinuous coefficients / Luca Gerardo-Giorda, Patrick Le Tallec b, Frédéric Nataf // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2004. – Vol. 193. – P. 745-764.
 14. *De Groen P.P.N.* Error bounds for exponentially fitted Galerkin methods applied to stiff two-point boundary value problems / P.P.N. De Groen, P.W. Hemker // *Numerical Analysis of Singular Perturbations Problems*, Hemker P.W., J.J. II. Miller eds. New-York: Academic Pressю – 1979. – P. 217-249.
 15. *Hemker P.W.* A numerical study of stiff two-point boundary value problems / P.W. Hemker – Amsterdam: Mathematical Center, 1977. – 178 p.

16. *Houston P.* Stabilized hp-finite element methods for first-order hyperbolic problems / P. Houston, C. Schwab, E. Suli // SIAM J. Numer. Anal. – 2000. – Vol. 37. – P. 1618-1643.
17. *Hughes T.J.R.* A simple scheme for developing 'upwind' finite elements / T.J.R. Hughes // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1978. – Vol. 12. – P. 1359-1365.
18. *Karlsen K. H.* Upwind difference approximations for degenerate parabolic convection-diffusion equations with discontinuous coefficient / K.H. Karlsen, N.H. Risebro, J.D. Towers // IMA, Journal of Numerical Analysis. – 2002. – Vol. 22. – P. 623-664.
19. *Proft J.* Discontinuous Galerkin methods for convection-diffusion equations for varying and vanishing diffusivity / J. Proft, B. Rivière // International Journal of Numerical Analysis and Modelling, Institute of Scientific Computing and Information. – 2009. – Vol. 6. – P. 553-561.
20. *Ross Hans Görg* Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection – Diffusion – Reaction and flow problems / Hans Görg Ross, Martin Stynes, Lutz Tobiska. – Berlin Heidelberg, Springer – Verlag, 2008. – 598 p.
21. *Siegel P.* Solution of the advection-diffusion equation using a combination of discontinuous and mixed finite elements / P. Siegel, R. Mosè, P. Ackerer, J. Jaffre // Intl. J. Numer. Meth. Flu. – 1997. – Vol. 24. – P. 595-613.
22. *Trotta R.L.* Multidomain finite elements for advection-diffusion equations / R.L. Trotta // Appl. Numer. Math. – 1996. – Vol. 21. – P. 91-118.

Стаття: надійшла до редколегії 13.05.2014

доопрацьована 03.06.2014

прийнята до друку 17.06.2014

**POWER BASIS FUNCTION OF FEM FOR SINGULAR PERTURBED
BOUNDARY VALUE PROBLEM OF ADVECTION-DIFFUSION-REACTION
WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS**

Arkadii Kindyaliuk, M. Prytula

Ivan Franko National University of Lviv,

Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kom@franko.lviv.ua

The numerical scheme for singular perturbed boundary value problem with advection-diffusion-reaction equation with discontinuous coefficients has been proposed by means of finite element method with power basis functions application. The value of stabilization parameter has been determined. Numerical experiments report power basis functions better suitable for this type of problems than linear or exponential basis functions.

Key words: Finite Element Method, singular perturbed problem, stabilized schemes, power basis functions, power approximations.