ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2016. Вип. 24. С. 44–52
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 24. P. 44–52

М А Т Е М А Т И Ч Н Е   М О Д Е Л Ю В А Н Н Я

УДК 519.6:517.925

ТОЧНА СУМАРНА ОЦІНКА АПОСТЕРІОРНИХ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ ДЛЯ ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ КРУЧЕННЯ СТРИЖНІВ

О. Вовк[1], Г. Квасниця[1], Г. Шинкаренко[1,2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua
[2]Опольський політехнічний університет, вул. Прушковська, 76, Ополе, 45-758, e-mail: h.shynkarenko@gmail.com

Побудовано двосторонні оцінки похибок апроксимацій МСЕ розв'язку задачі про статичне скручування неоднорідного стрижня силами, еквівалентними крутному моменту. Ґрунтуючись на гіпотезах Сен-Венана, спочатку розглядаємо цю задачу в термінах функції кручення, яка є розв'язком задачі Неймана для рівняння Пуассона, а пізніше звертаємося до формулювання цієї задачі в термінах функції напружень Прандтля, яка є розв'язком задачі Діріхле з рівнянням Пуассона. В обох задачах переходимо до коректних варіаційних формулювань, аналізуємо їх з позицій мінімізації відповідних квадратичних функціоналів. Двоїстість цих задач приводить нас до основного результату: для обох довільно обчислених допустимих апроксимацій методу скінченних елементів цих задач сума квадратів енергетичних норм їхніх похибок завжди дорівнює сумі значень розглядуваних квадратичних фунціоналів, обчислених на цих апроксимаціях.

Ключові слова: метод скінченних елементів (МСЕ), апостеріорні оцінки похибок, кручення стрижнів, двосторонні оцінки похибок, двоїсті задачі, функція напружень Прандтля, функція Сен-Венана.

1. ВСТУП

Апостеріорні оцінки похибок знайдених апроксимацій є важливою частиною сучасних наукових та інженерних обчислень [3,6]. Використовуючи їх як основу адаптування (локального згущення та розрідження) тріангуляцій, можна одержати ефективні та потужні алгоритми методу скінченних елементів [7]. Щоб апостеріорні оцінки похибок були справді корисними, необхідно і достатньо, щоб вони були (i) надійними, (ii) ефективними та (iii) недорогими в практиці комп'ютерних обчислень. У цьому випадку властивості надійності й ефективності безпосередньо приводять до еквівалентності апостеріорних оцінок та істинної похибки апроксимації [6].

Ми розвиваємо й аналізуємо апостеріорні оцінювачі похибок, побудовані за методикою Міхліна [2] і вжиті пізніше для оцінки похибок апроксимацій МСЕ в задачах кручення пружних призматичних стрижнів [3-5]. Головний результат праці – оцінка знайдених апроксимацій $\psi_h \in W_h$ та $u_\Delta \in V_\Delta$ для функції кручення Сен-Венана $\psi \in W$ та функції напружень Прандтля $u \in V$, відповідно, допомагає обчислити точну оцінку похибки цієї пари наближень за допомогою такої рівності:

$$\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_W^2+\|u-u_\Delta\|_V^2=\| z \|_W^2-\left[\| \nabla\psi_h \|_W^2+\| u_\Delta \|_V^2\right],$$

де $z=(-x_2,x_1)$, $\|\,.\,\|_W$ і $\|\,.\,\|_V$ енергетичні норми просторів допустимих функцій W та V відповідно, $W_h\subset W, V_\Delta\subset V$.

Праця побудована так. В п. 2 наводимо тривимірну задачу про статичне скручування неоднорідного стрижня силами, еквівалентними крутному моменту. Далі в п.3, ґрунтуючись на гіпотезах Сен-Венана, спрощуємо цю задачу до двовимірної крайової задачі Неймана для рівняння Пуассона в термінах функції кручення, а пізніше в п.4 розглядаємо двоїсте формулювання цієї задачі в термінах функції напружень Прандтля, яка є розв'язком задачі Діріхле з рівнянням Пуассона. Ми доповнюємо кожну з цих моделей кручення стрижня відповідною коректно сформульованою варіаційною задачею для обчислення узагальненого розв'язку, еквівалентною задачею мінімізації квадратичного функціонала та наводимо в лемах 3.1 та 4.1 оцінки похибок їхніх апроксимацій Рітца-Гальоркіна. В п.5 розглядаємо фізичну інтерпретацію розв'язків розглядуваних задач з погляду жорсткості стрижня на кручення і в п.6 визначаємо анонсований вище головний результат у вигляді теореми 6.1.

2. ЗАДАЧА ЕЛАСТОСТАТИКИ ПРО СКРУЧУВАННЯ СТРИЖНЯ

Нехай пружний призматичний стрижень займає область

$$D=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3:\quad x=(x_1,x_2)\in\Omega\in R^2, x_3\in(0,l)\},$$

де Ω – область його поперечного перерізу з ліпшицевим контуром $\Gamma=\partial\Omega$. Вважатимемо, що бічна поверхня стрижня $S=\Gamma\times(0,l)$ вільна від зовнішнього навантаження, а його торці $\Omega_z=\Omega\times\{z\}$, $z=0,l$ навантажено силами, еквівалентними крутному моменту M .

У цьому випадку задача еластостатики описується однорідними рівняннями рівноваги

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ji}=0\quad в\ \ D,\quad i=1,2,3, \tag{2.1}$$

крайовими умовами на бічній поверхні

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ji}n_j=0\quad на\ \ \mathrm{S},\ i=1,2,3, \tag{2.2}$$

і крайовими умовами на торцях стрижня

$$\int_\Omega\sigma_{3i}dx=0,\ \ i=1,2,\ \int_\Omega\sigma_{33}x_1^k x_2^m dx=0,\quad k+m\le 1, \tag{2.3}$$

$$\int_\Omega(x_1\sigma_{32}-x_2\sigma_{31})dx=M,\quad x_3=0,l\,. \tag{2.4}$$

Тут $\sigma=\{\sigma_{ij}(x,z)\}_{i,j=1}^3$ симетричний тензор напружень, $\sigma_{ij}=\sigma_{jl}$, (n_1,n_2,n_3) – одиничний вектор зовнішньої нормалі до бічної поверхні стрижня S ,

$$n_1=\cos(n,x_1)=dx_2/ds,\quad n_2=\cos(n,x_2)=-dx_1/ds,\quad n_3=\cos(n,x_3)=0$$
$$\forall(x,x_3)\in S,$$

де крива $\gamma=(x_1(s),x_2(s))$ описує контур Γ , ds – її елемент дуги.

Далі припускаємо, що

$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=0\ \text{ в }\ D=\Omega\times(0,l), \tag{2.5}$$

і за певних додаткових умов будемо шукати зсувні компоненти тензора напружень σ_{31} і σ_{32} так, щоб виконувалися рівняння (2.1)-(2.4).

3. ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ СТРИЖНІВ ДЛЯ ФУНКЦІЇ СЕН-ВЕНАНА

Згідно з гіпотезою Сен-Венана у кожному поперечному перерізі $x_3 = const$ компоненти вектора пружних зміщень стрижня $u = \{u_i(x, x_3)\}_{i=1}^3$ подають у вигляді такого відокремлення змінних:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -\alpha x_2 x_3, \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 x_3, \quad u_3(x_1, x_2, x_3) = \alpha \psi(x_1, x_2), \tag{3.1}$$

де $\psi = \psi(x_1, x_2)$ так звана функція кручення Сен-Венана; α – кут закручування, сталий для всіх волокон стрижня, паралельних його осі [1].

Тоді, враховуючи співвідношення Коші для деформацій і закон Гука, нетривіальне з рівнянь рівноваги (2.1) і ненульові компоненти тензора напружень набувають вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{31} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{32} = 0, \\ \sigma_{13} = G\alpha\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} - x_2\right), \quad \sigma_{23} = \sigma\alpha\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} + x_1\right) \qquad в \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Тут задана функція $G = G(x)$ описує модуль зсуву матеріалу стрижня.

Введемо вектор $z = (z_1, z_2) := (-x_2, x_1)$ і перепишемо рівняння рівноваги з (3.2) в термінах функції кручення Сен-Венана так:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{3i} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[G\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + z_i\right)\right] = \nabla \cdot \left[G\alpha\left(\nabla\psi + z\right)\right] = 0 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{3.3}$$

Тут оператор $\nabla := \{\partial / \partial x_i\}_{i=1}^2$ визначає градієнт скалярної функції, $a \cdot b := \sum_{i=1}^2 a_i b_i$ для довільних векторів $a = \{a_i\}, b = \{b_i\} \in R^2$.

У цьому ж стилі переформулюємо ненульову крайову умову з (2.2)

$$0 = \sum_{i=1}^{2} \sigma_{3i} \cos(n, x_i) = G\alpha\left(\nabla\psi + z\right) \cdot n \quad \text{на } \Gamma, \tag{3.4}$$

де $n = \{\cos(n, x_i)\}_{i=1}^2 = \left(\dfrac{dx_2}{ds}, -\dfrac{dx_1}{ds}\right)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі Γ.

Отож, гіпотези Сен-Венана (3.1) дають змогу звести задачу еластостатики про кручення пружних призматичних стрижнів до крайової задачі Неймана вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти } \psi = \psi(x) \text{ таку,що} \\ -\nabla \cdot (G\nabla\psi) = \nabla \cdot (G z) \quad в \quad \Omega \subset R^2, \\ -n \cdot (G\nabla\psi) = G n \cdot z \quad на \quad \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Оскільки внаслідок замкнености межі Γ

$$\int_\Omega \nabla \cdot G z \, dx = \int_\Gamma G(z_1 \cos(n, x_1) + z_2 \cos(n, x_2))\, ds$$
$$= \int_\Gamma G\left[-x_2 \frac{dx_2}{ds} - x_1 \frac{dx_1}{ds}\right] ds = -\frac{1}{2}\int_\Gamma G \frac{d}{ds}(x_1^2 + x_2^2) ds = 0,$$

то задача Неймана розв'язувана з точністю до адаптивної сталої. Щоб виділити лише один розв'язок, ми приймемо додаткову умову

$$\int_\Omega \psi dx = 0.$$

Неважко переконатися, що крайова задача (3.5) допускає таке варіаційне формулювання:

$$\begin{cases} \text{задано } z = (-x_2, x_1) \in R^2, \ \ W = \{w \in H^1(\Omega) : \int_\Omega w dx = 0\}; \\ \text{знайти } \psi \in W \text{ таку , що } a(\nabla\psi + z, \nabla w) = 0 \quad \forall w \in W, \end{cases} \tag{3.6}$$

де білінійна форма $a(\, . \, , \, . \,) : W \times W \to R$ визначена в такий спосіб:

$$a(\nabla\psi, \nabla w) := \int_\Omega G\nabla\psi \cdot \nabla w \, dx \qquad \forall \psi, w \in W. \tag{3.7}$$

Неважко переконатися (наприклад, міркуваннями від супротивного), що білінійна форма (3.7) є скалярним добутком на W і породжує норму

$$\| \nabla w \|_W := a^{1/2}(\nabla w, \nabla w) \qquad \forall w \in W. \tag{3.8}$$

Тому варіаційна задача (3.6) однозначно розв'язана і її розв'язок $\psi \in W$ неперервно залежить від даних задачі

$$\| \nabla\psi \|_W \le \| z \|_W \, . \tag{3.9}$$

Поряд із варіаційною задачею (3.6) ми можемо сформулювати еквівалентну задачу про мінімум квадратичного функціонала:

$$\text{знайти } \psi \in W \text{ таку, що} \quad J(\psi) = \inf_{w \in W} J(w), \tag{3.10}$$

де

$$J(w) := \| \nabla w + z \|_W^2 \qquad \forall w \in W.$$

Неважко бачити, що функціоналу $J(w)$ можна надати вигляду

$$\begin{aligned} J(w) = a(\nabla w + z, \nabla w + z) &= \| \nabla(w - \psi) \|_W^2 - \| \nabla\psi \|_W^2 + \| z \|_W^2 \\ &= \| \nabla(w - \psi) \|_W^2 + J(\psi) \qquad \forall w \in W. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Тепер, використовуючи (3.11) та рівняння варіаційної задачі (3.6), можна переконатися у правильності такого твердження.

Лема 3.1 про апроксимацію функції кручення. Нехай функція $\psi \in W$ є розв'язком варіаційної задачі (3.6) або, що еквівалентно, задачі мінімізації (3.10) і $\psi_h \in W_h \subset W, \, \dim W_h < +\infty,$ її апроксимація Гальоркіна-Рітца, обчислена як розв'язок задачі

$$\text{знайти } \psi_h \in W_h \text{ таку, що} \quad J(\psi_h) = \inf_{w \in W_h} J(w). \tag{3.12}$$

Тоді похибка цього наближення $\varepsilon_h := \psi - \psi_h \in W$ задовольняє варіаційне рівняння

$$a(\nabla\varepsilon_h, \nabla w) = 0 \qquad \forall w \in W_h \tag{3.13}$$

або

$$a(\nabla\varepsilon_h, \nabla w) = -a(\nabla\psi_h + z, \nabla w) \qquad \forall w \in W. \tag{3.14}$$

Зрештою, похибка такої апроксимації допускає оцінки вигляду

$$\begin{aligned} \|\nabla\varepsilon_h\|_W^2 &= \| \nabla(w - \psi) \|_W^2 = J(\psi_h) - J(\psi) \\ &= \| \nabla\psi_h + z \|_W^2 - \| \nabla\psi + z \|_W^2 , \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\|\nabla\varepsilon_h\|_W \le \| \nabla\psi_h + z \|_W = J^{1/2}(\psi_h). \tag{3.16}$$

Зауважимо, що нерівність (3.16) допомагає (можливо, досить грубо) обчислювати верхню межу похибки наближення функції кручення ψ її апроксимацією ψ_h, якщо вона на цей момент вже знайдена; отож, оцінка (3.16) є апостеріорною оцінкою похибки апроксимації Гальоркіна-Рітца. Водночас рівність (3.15) може слугувати основою для побудови точніших оцінок, якщо з'являються певні можливості надійного відшукування наближених значень функціонала $J(\psi)$. Тому, наслідуючи [6], розглянемо альтернативне формулювання задачі кручення призматичних стрижнів.

4. ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ В ТЕРМІНАХ ФУНКЦІЇ НАПРУЖЕННЯ ПРАНДТЛЯ

Введемо так звану функцію напружень Прандтля $u = u(x)$ згідно з правилом

$$\sigma_{13} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} = G\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - x_2\right), \qquad \sigma_{23} = -\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} = G\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + x_1\right) \tag{4.1}$$

і відзначимо зв'язок її градієнта з градієнтом функції кручення Сен-Венана

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{1}{G}\frac{\partial u}{\partial x_2} + x_2, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\frac{1}{G}\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 .$$

Зауважимо, що підстановка (4.1) в рівняння рівноваги з (3.2) перетворює його у тотожність; з іншого боку, визначення (4.1) доводить, що функція Прандтля задовольняє рівняння

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \nabla \cdot \left(G^{-1}\nabla u\right) + 2 \qquad \text{в} \qquad \Omega.$$

Далі, враховуючи крайові умови (2.2), знаходимо, що

$$0 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{d x_2}{d s} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{d x_1}{d s} = 2\alpha \frac{du}{ds} \qquad \text{на} \quad \Gamma,$$

тому $u = const$ на межі Γ. Без обмеження загальності надалі приймемо, що ця стала дорівнює нулеві. Отже, з використанням функції Прандтля задача кручення стрижнів набуває вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -\nabla \cdot (G^{-1}\nabla u) = 2 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{4.2}$$

Подібно, як і для функції кручення, формулюємо задачі для відшукання узагальненого розв'язку (4.1)

Визначимо простір $V := H_0^1(\Omega)$ як простір допустимих функцій і білінійну форму

$$b(u,v) := \int_\Omega G^{-1}\nabla u \cdot \nabla v \, dx \qquad \forall u, v \in V . \tag{4.3}$$

Тоді варіаційне формулювання крайової задачі (4.1) записується так:

$$\begin{cases} \text{знайти } u \in V \text{ таку, що} \\ b(u,v) = 2(1,v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{4.4}$$

З огляду на нерівність Пуанкаре-Фрідріхса білінійна форма (4.2) є скалярним добутком на V і породжує норму

$$\| v \|_V = b^{1/2}(v,v) \qquad \forall v \in V ,$$

еквівалентну стандартній нормі простору Соболєва $H_0^1(\Omega)$.

Отож, задача (4.4) коректно сформульована, тобто має єдиний розв'язок $u \in V$ і такий, що

$$\| u \|_V^2 = 2(1,u) = 2\int_\Omega u dx. \tag{4.5}$$

Варіаційній задачі (4.4) надамо форму задачі мінімізації квадратичного функціонала

$$\text{знайти } u \in V \text{ таку, що } F(u) \le F(v) \qquad \forall v \in V, \tag{4.6}$$

де $F(v) := b(v,v) - 4(1,v) \quad \forall v \in V$.

Після нескладних перетворень із застосуванням (4.4) і (4.5) одержуємо рівність

$$F(v) = \| u - v \|_V^2 - \| u \|_V^2 = \| u - v \|_V^2 + F(u) \qquad \forall v \in V . \tag{4.7}$$

Лема 4.1 про апроксимацію Гальоркіна-Рітца функції напружень. Нехай $u \in V = H_0^1(\Omega)$ є розв'язком варіаційної задачі (4.4) або, що еквівалентно, задачі мінімізації (4.6) і $u_\Delta \in V_\Delta \subset V, \dim V_\Delta < +\infty,$ її апроксимація Гальоркіна-Рітца.

Тоді похибка $e_\Delta = u - u_\Delta \in V$ задовольняє рівняння

$$b(e_\Delta, v) = 2(1,v) - b(u_\Delta, u) \qquad \forall v \in V, \tag{4.8}$$

$$\| u - u_\Delta \|_V^2 = F(u_\Delta) - F(u) . \tag{4.9}$$

5. ЖОРСТКІСТЬ СТРИЖНЯ НА СКРУЧУВАННЯ

Повертаючись до визначення крутного моменту на торцях стрижня

$$M = \int_\Omega (x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31}) dx ,$$

перепишемо його вигляд у термінах функцій Сен-Венана та Прандтля. Наприклад,

$$\begin{aligned} M = M(\psi) &= \int_\Omega \left[x_1 G\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + x_1 \right) - x_2 G\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - x_2 \right) \right] dx \\ &= \int_\Omega G\alpha \left| \nabla\psi + z \right|^2 dx - \int_\Omega G\alpha \left| \nabla\psi + z \right| . \nabla\psi dx \\ &= \alpha \| \nabla\psi + z \|_W^2 . \end{aligned} \tag{5.1}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} M = M(u) &= \int_\Omega \left(-x_1 \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2 \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx \\ &= -\alpha \int_\Gamma u [x_1 n_1 + x_2 n_2] ds + 2\alpha \int_\Omega u \, d\, x \\ &= 2\alpha(1,u) = \alpha \| u \|_V^2 . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Отже, $M = \alpha \| u \|_V^2 = \alpha \| \nabla\psi + z \|_W^2$.

Коефіцієнт пропорційності $C = M / \alpha$ відомий у механіці під назвою жорсткості стрижня на скручування

$$C = \| u \|_V^2 = \| \nabla\psi + z \|_W^2 . \tag{5.3}$$

6. АПОСТЕРІОРНІ ПОХИБКИ АПРОКСИМАЦІЙ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КРУЧЕННЯ

Повертаючись до визначення функціоналів мінімізації $J(\cdot):W\to R$ та $F(\cdot):V\to R$, нагадаємо, що їхні мінімальні значення досягаються на розв'язках варіаційної задачі (3.6) та (4.4), відповідно, і тому

$$\begin{cases} \|u\|_V^2 = -F(u) = C, \\ \|\nabla\psi + z\|_W^2 = J(\psi) = C. \end{cases} \tag{6.1}$$

Нехай $\psi_h \in W_h \subset W$ і $u_\Delta \in V_\Delta \subset V$ – розв'язки дискретизованих за Гальоркіним задач

$$\text{знайти } \psi_h \in W_h \text{ таку, що } a(\nabla\psi_h + z, \nabla w) = 0 \qquad \forall w \in W_h \tag{6.2}$$

і

$$\text{знайти } u_\Delta \in V_\Delta \text{ таку, що } b(u_\Delta, v) = 2(1, v) \qquad \forall v \in V_\Delta, \tag{6.3}$$

відповідно. Тоді згідно з лемами 3.1 і 4.1 матимемо такі оцінки похибок знайдених наближень:

$$\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_W^2 = J(\psi_h) - J(\psi) = J(\psi_h) - C,$$

$$\|u-u_\Delta\|_V^2 = F(u_\Delta) - F(u) = F(u_\Delta) + C.$$

Після додавання цих рівностей приходимо до такого твердження.

Теорема 6.1. Про апостеріорну оцінку похибок апроксимації розв'язку задачі кручення.

Нехай $\psi_h \in W_h \subset W$ і $u_\Delta \in V_\Delta \subset V$ є апроксимаціями Гальоркіна-Рітца розв'язків $\psi \in W$ і $u \in V$ задач про кручення стрижнів (3.6) і (4.3), відповідно.

Тоді похибки знайдених наближень задовольняють таку рівність:

$$\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_W^2 + \|u-u_\Delta\|_V^2 = J(\psi_h) + F(u_\Delta) = \|\nabla\psi_h + z\|_W^2 - \|u_\Delta\|_V^2. \tag{6.4}$$

До цього варто додати, що праву частину рівності обчислюють за знайденими розв'язками.

Зауваження 6.1. Рівняння задачі (6.2) приведемо до вигляду

$$0 = \alpha(\nabla\psi_h + z, \nabla w) = \alpha(\nabla\psi_h + z, \nabla w + z - z) = \alpha(\nabla\psi_h + z, \nabla w + z) - \alpha(z, \nabla\psi_h + z)$$
$$= \alpha(z + \nabla\psi_h, z + \nabla w) - \alpha(z, z) + \alpha(\nabla\psi_h, \nabla\psi_h) \qquad \forall w \in W_h$$

і приймемо $w = \psi_h$. У підсумку одержимо рівність

$$\|z\|_W^2 = \|z + \nabla\psi_h\|_W^2 + \|\nabla\psi_h\|_W^2 . \tag{6.5}$$

Із теореми 6.1, яка стверджує, що апроксимації $\psi_h \in W_h$ і $u_\Delta \in V_\Delta$ допускають похибки

$$\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_W^2 + \|u-u_\Delta\|_V^2 = J(\psi_h) + F(u_\Delta),$$

отримаємо грубі верхні оцінки похибок цих наближень

$$\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_W \le \sqrt{J(\psi_h) + F(u_\Delta)},$$

$$\|u-u_\Delta\|_V \le \sqrt{J(\psi_h) + F(u_\Delta)} .$$

7. ВИСНОВКИ

Використавши гіпотези Сен-Венана, подаємо формулювання крайових задач про кручення неоднорідних пружних призматичних стрижнів у термінах функції кручення Сен-Венана, і функції напружень Прандтля. Доповнюємо кожну з цих двоїстих моделей відповідною коректно сформульованою варіаційною задачею для обчислення узагальненого розв'язку й еквівалентною задачею мінімізації квадратичного функціонала.

Такий підхід допоміг простим уніфікованим способом проаналізувати основні властивості похибок апроксимацій Гальоркіна-Рітца для розв'язків цих задач і узагальнити у теоремі 6.1 результати Міхліна [2] у тому сенсі, що вона визначає цілком обчислювану точну оцінку суми квадратів енергетичних норм похибок апроксимацій розв'язків обох моделей кручення стрижнів. Цей головний результат можна розглядати як солідну теоретичну основу побудови ефективних і надійних оцінювачів похибок апроксимацій методу скінченних елементів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Арутюнян Н.Х.* Кручение упругих тел. / Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян. – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.
2. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 412 с.
3. *Савула Я.Г.* Апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку, одержаного методом скінченних елементів, у задачі кручення стержнів / Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко, В.М. Вовк // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1977. – Вип. 12. – С. 63-68.
4. *Савула Я.Г.* Некоторые приложения метода конечных элементов / Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко, В.Н. Вовк. – Львов: ЛГУ, 1981. Вип. 12. – С. 88.
5. *Шинкаренко Г.А.* Применение метода конечных элементов в задаче кручения неоднородных стержней / Г.А. Шинкаренко, Я.Г. Савула, В.Н. Вовк. В сб.: Метод конечных элементов в строительной механике. – Горький: Изд-во ГГУ, 1975. – С. 108-118.
6. *Han W.* A Posteriori Error Analysis via Duality Theory with Applications in Modeling and Numerical Approximations / W. Han. – New York: Springer, 2005. – P. 319.
7. *Repin S.I.* A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations / S.I. Repin. – Berlin, New-York: Walter de Gruyter, 2008. – P. 328.

Стаття: надійшла до редколегії 02.09.2015
доопрацьована 14.10.2015
прийнята до друку 28.10.2015

EXACT TOTAL A POSTERIORI ERROR ESTIMATION OF FEM APPROXIMATIONS FOR DUAL TORSION PROBLEMS

O. Vovk[1], H. Kvasnytsya[1], H. Shynkarenko[1,2]

[1]Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua
[2]Opole University of Technology,
Prószkowska Str., 76, Opole, 45-758, e-mail: h.shynkarenko@gmail.com

We construct the double-sided error estimations of FEM approximations to a solution of the static torsion problem. At first, based on Saint-Venant's hypotheses, we consider this problem in terms of torsion function that is the solution of Neumann problem for Poisson equation. And then we turn to the formulation of this problem in terms of Prandtl stress function that is the solution of Dirichlet problem for Poisson equation. In both cases we formulate variational problems and analyze them by using the minimization of the appropriate quadratic functionals. The duality of these problems leads us up to the main result: the sum of squared energy error norms for the admissible FEM approximations is always equal to the sum of the above quadratic functionals for its approximations.

Key words: finite element method (FEM), a posteriori error estimation, torsion of bars, double-sided error estimation, dual problems, Prandtl stress function, Saint-Wenant's function.