ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2016. Вип. 24. С. 39–43
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 24. P. 39–43

УДК 519.622

МОДИФІКАЦІЯ ЕКСТРАПОЛЯЦІЙНОГО МЕТОДУ АДАМСА ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Л. Фундак, Г. Цегелик

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua

Побудовано модифікацію екстраполяційного методу Адамса чисельного розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Досліджено його ефективність порівняно з класичним екстраполяційним методом Адамса.

Ключові слова: задача Коші, екстраполяційний метод Адамса, модифікація, чисельний метод.

1. ВСТУП

Для чисельного розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь широко використовують екстраполяційний й інтерполяційний методи Адамса [1, 2]. Для побудови цих методів використано інтерполяційний поліном Ньютона для інтерполювання назад у випадку рівновіддалених вузлів інтерполювання для апроксимації підінтегральної функції. Розглядаємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку. Для побудови чисельного методу розв'язування цієї задачі використовуємо інший підхід, ніж в класичному методі Адамса: спочатку невідому функцію $y = y(x)$ в околі вибраної точки подаємо у вигляді формули Тейлора з залишковим членом в інтегральній формі, а пізніше після деяких перетворень для апроксимації підінтегральної функції використовуємо інтерполяційний поліном Ньютона.

2. ПОБУДОВА МЕТОДУ

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Припустимо, що в області $D = \{x_0 \le x \le x_0 + a, |y - y_0| \le b\}$ функція $f(x, y)$ є неперервною і задовольняє умову Ліпшиця по y зі сталою L. Шукатимемо чисельний розв'язок задачі (1), (2) на проміжку $[x_0, x_0 + a]$, де $a > 0$. Для цього на цьому проміжку виберемо систему точок $x_k = x_0 + kh$, $k = 1, 2, \dots, n$, $h = a/n$, і знайдемо наближені значення $y_1, y_2, \dots, y_n$ точного розв'язку в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Нехай якось ми знайшли наближені значення $y_1, y_2, \dots, y_k$ розв'язку задачі (1), (2) в точках $x_1, x_2, \dots, x_k$ (це можна зробити за допомогою іншого методу). Якщо $y = y(x)$ – розв'язок задачі (1), (2), то, подавши його за формулою Тейлора в околі точки x_k з залишковим членом в інтегральній формі, одержимо

$$y(x) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x} y'(u)\,\mathrm{d}u .$$

Якщо в цій формулі прийняти $x = x_{k+1}$ і $x = x_{k-1}$, то, відповідно, матимемо

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(u)\,\mathrm{d}u ,$$

$$y(x_{k-1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k-1}} y'(u)\,\mathrm{d}u .$$

Зробивши заміну $u = x_k + ht$, одержимо

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\int_{0}^{1} y'(x_k + ht)\,\mathrm{d}t ,$$

$$y(x_{k-1}) = y(x_k) + h\int_{0}^{-1} y'(x_k + ht)\,\mathrm{d}t .$$

Додавши обидві формули, матимемо

$$y(x_{k+1}) = 2y(x_k) - y(x_{k-1}) + h\left(\int_{0}^{1} y'(x_k + ht)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{0} y'(x_k + ht)\,\mathrm{d}t\right). \quad (3)$$

Оскільки $y'(x_k + ht) = f\left(x_k + ht, y(x_k + ht)\right)$, то

$$y(x_{k+1}) = 2y(x_k) - y(x_{k-1}) + h\left(\int_{0}^{1} f\left(x_k + ht, y(x_k + ht)\right)\mathrm{d}t - \int_{-1}^{0} f\left(x_k + ht, y(x_k + ht)\right)\mathrm{d}t\right).$$

Якщо для функції $f\left(x, y(x)\right)$ побудувати інтерполяційний поліном Ньютона для інтерполювання назад, прийнявши за вузли інтерполювання рівновіддалені точки $x_0, x_1, \ldots, x_k$, і зробити заміну $x = x_k + ht$, то одержимо формулу

$$f\left(x_k + ht, y(x_k + ht)\right) = f\left(x_k, y(x_k)\right) + t\Delta f\left(x_{k-1}, y(x_{k-1})\right) + \quad (4)$$
$$+ \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f\left(x_{k-2}, y(x_{k-2})\right) + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+k-1)}{k!}\Delta^k f\left(x_0, y(x_0)\right) +$$
$$+ R_{k+1}(x_k + ht) ,$$

де, припустивши, що $f(x, y)$ має неперервні похідні по x і y досить високого порядку в області, що містить прямокутник D,

$$R_{k+1}(x_k + ht) = \frac{y^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} t(t+1)..(t+k)h^{k+1}, \xi \in (x_0, x_k) .$$

Підставимо у формулу (3) замість функції $f\left(x_k + ht, y(x_k + ht)\right)$ її вираз із формули (4), отримаємо

$$y(x_{k+1}) = 2y(x_k) - y(x_{k-1}) +$$
$$+ h\left(\sum_{s=0}^{k} \alpha_s \Delta^s f\left(x_{k-s}, y(x_{k-s})\right) - \sum_{s=0}^{k} \beta_s \Delta^s f\left(x_{k-s}, y(x_{k-s})\right)\right) + r_{k+1} ,$$

де

$$\alpha_s = \frac{1}{s!}\int_{0}^{1} t(t+1)\ldots(t+(s-1))\,\mathrm{d}t , \quad \beta_s = \frac{1}{s!}\int_{-1}^{0} t(t+1)\ldots(t+(s-1))\,\mathrm{d}t , \quad s = 1,2,\ldots,$$

$$\alpha_0 = \beta_0 = 1,$$

$$r_{k+1} = h\left(\int_0^1 R_{k+1}(x_k + ht)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^0 R_{k+1}(x_k + ht)\,\mathrm{d}t\right).$$

Отже, для обчислення наближеного значення y_{k+1} одержуємо формулу

$$y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1} + h\sum_{s=0}^{k}(\alpha_s - \beta_s)\Delta^s f\left(x_{k-s}, y_{k-s}\right). \quad (5)$$

Обчисливши за формулою (5) наближене значення y_{k+1} для функції $f(x, y(x))$, побудуємо інтерполяційний поліном Ньютона для інтерполювання назад, прийнявши за вузли інтерполювання точки $x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$. Тоді для обчислення наближеного значення y_{k+2} аналогічно матимемо

$$y_{k+2} = 2y_{k+1} - y_k + h\sum_{s=0}^{k+1}(\alpha_s - \beta_s)\Delta^s f\left(x_{k+1-s}, y_{k+1-s}\right).$$

Припустимо, що з деякого кроку степінь інтерполяційного полінома є незмінною і дорівнює m, а обчислення доведені до значення y_i. Тоді для обчислення наближеного значення y_{i+1} одержуємо формулу

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h\sum_{s=0}^{m}(\alpha_s - \beta_s)\Delta^s f\left(x_{i-s}, y_{i-s}\right).$$

Оскільки $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{5}{12}$, $\beta_2 = -\frac{1}{12}$, $\alpha_3 = \frac{3}{8}$, $\beta_3 = -\frac{1}{24}$, то $\alpha_0 - \beta_0 = 0$, $\alpha_1 - \beta_1 = 1$, $\alpha_2 - \beta_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 - \beta_3 = \frac{5}{12}$. Тому

при $m = 0$

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1};$$

при $m = 1$

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h\Delta f(x_{i-1}, y_{i-1});$$

при $m = 2$

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h\left(\Delta f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_{i-2}, y_{i-2})\right);$$

при $m = 3$

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h\left(\Delta f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_{i-2}, y_{i-2}) + \frac{5}{12}\Delta^3 f(x_{i-3}, y_{i-3})\right).$$

3. ПРИКЛАД

Знайти чисельний розв'язок задачі Коші

$$y' = -\frac{(1 + 2xy\ln x)y}{x}, \quad y(1) = 0.5$$

на проміжку $[1, 2]$, використовуючи класичний і модифікований екстраполяційний метод Адамса.

Точний розв'язок задачі $y^* = \dfrac{1}{x(\ln^2 x + 2)}$.

У табл. 1 наведено результати розв'язування задачі з використанням класичного екстраполяційного методу Адамса [2, с. 51-52]

$$y_{i+1} = 2y_i + \frac{h}{2}\left(3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right) \text{ при } m = 1;$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left(23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})\right) \text{ при } m = 2;$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})\right) \text{ при } m = 3.$$

Таблиця 1

Класичний екстраполяційний метод Адамса

x_i	Розв'язок при різних m			Точне значення розв'язку $y^*(x_i)$
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	
1	0.5	0.5	0.5	0.5
1.1	0.4524863	0.4524863	0.4524863	0.4524902
1.2	0.4099294	0.4098477	0.4098477	0.4098546
1.3	0.3720159	0.3718634	0.3718091	0.3718183
1.4	0.3383421	0.3380695	0.3379781	0.3380092
1.5	0.3084751	0.3080765	0.3079733	0.3080143
1.6	0.2819882	0.2814692	0.2813688	0.2814170
1.7	0.2584806	0.2578582	0.2577727	0.2578208
1.8	0.2375872	0.2368820	0.2368147	0.2368609
1.9	0.2189821	0.2182149	0.2181673	0.2182093
2	0.2023780	0.2015679	0.2015385	0.2015761

У табл. 2 наведено результати розв'язування цієї ж задачі з використанням модифікованого екстраполяційного методу Адамса

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h\left(f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right) \text{ при } m = 1;$$

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \frac{h}{2}\left(3f(x_i, y_i) - 4f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})\right) \text{ при } m = 2;$$

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \frac{h}{12}\left(23f(x_i, y_i) - 39f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 21f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 5f(x_{i-3}, y_{i-3})\right) \text{ при } m = 3.$$

Таблиця 2

Модифікований екстраполяційний метод Адамса

x_i	Розв'язок при різних m			Точне значення розв'язку $y^*(x_i)$
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	
1	2	3	4	5
1	0.5	0.5	0.5	0.5
1.1	0.4524863	0.4524863	0.4524863	0.4524902
1.2	0.4099347	0.4098477	0.4098477	0.4098546
1.3	0.3721321	0.3718663	0.3718091	0.3718183
1.4	0.3387263	0.3381322	0.3379730	0.3380092

1	2	3	4	5
1.5	0.3092969	0.3082117	0.3079389	0.3080143
1.6	0.2834057	0.2816769	0.2812957	0.2814170
1.7	0.2606291	0.2581261	0.2576521	0.2578208
1.8	0.2405755	0.2371934	0.2366464	0.2368609
1.9	0.2228927	0.2185523	0.2179524	0.2182093
2	0.2072702	0.2019146	0.2012806	0.2015761

4. ВИСНОВКИ

Побудована модифікація екстраполяційного методу Адамса чисельного розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Цегелик Г.Г.* Чисельні методи: підручник / Г.Г. Цегелик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 408 с.
2. *Ортега Дж.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега , У. Пул. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

Стаття: надійшла до редколегії 02.09.2015
доопрацьована 14.10.2015
прийнята до друку 28.10.2015

MODIFICATION OF ADAMS EXTRAPOLATION METHOD OF SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

L. Fundak, H. Tsegelyk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua

In this paper constructed a modification of the method of extrapolation Adams numerical solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations of the first order.

Key words: the Cauchy problem, Extrapolation method of Adams, modification, numerical method.