ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2016. Вип. 24. С. 32–38
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 24. P. 32–38

УДК 519.6

УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ХОВАНСЬКОГО ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ РІККАТІ

А. Недашковська

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: nastia.nedashkovska@gmail.com

Запропоновано метод розв'язування алгебричного рівняння Ріккаті. Отримано рекурентні співвідношення для знаходження наближених розв'язків цього матричного рівняння. Досліджено збіжність матричних ланцюгових дробів, які використовуються в обчислювальній схемі, проведено чисельні експерименти, які підтверджують ефективність запропонованого методу.

Ключові слова: ітераційний метод, рівняння Ріккаті, збіжність, операторні ланцюгові дроби.

1. ВСТУП

Необхідність розв'язувати рівняння Ріккаті виникає у багатьох теоретичних і прикладних дисциплінах, зокрема, в теорії лінійних гамільтонових систем, варіаційному численні, в задачах оптимального керування, фільтрації, стабілізації керованих лінійних систем та інших [1], [2].

Алгебричним рівнянням Ріккаті називається рівняння вигляду

$$XFX + AX + XB + C = 0. \qquad (1)$$

У цьому рівнянні A – квадратна матриця порядку n, B – квадратна матриця порядку m, F – $m \times n$-матриця, а C – $n \times m$-матриця. Потрібно обчислити $n \times m$-матрицю X.

Частковими випадками рівняння (1) є неперервне та дискретне рівняння Ріккаті.

Розглянемо деяку задачу про оптимальний лінійний регулятор [3]. Нехай стан лінійної стаціонарної керованої системи описується рівнянням

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \qquad (2)$$

Тут A – $n \times n$ матриця, а B – $n \times m$-матриця, а критерій якості задається за допомогою функціонала

$$J(u) = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt,$$

де R, Q – симетричні матриці, R додатно визначена, а Q додатно напіввизначена. Тоді рівнянню (2) можна поставити у відповідність рівняння Ріккаті

$$XBR^{-1}B^T X - A^T X - XA - Q = 0. \qquad (3)$$

Для дискретної стаціонарної системи керування задача про оптимальний регулятор зводиться замість (3) до дискретного рівняння Ріккаті (всі коефіцієнти цього рівняння дійсні) [3]

$$A^T XA - X - A^T XB\left(R + B^T XB\right)^{-1} B^T XA + Q = 0.$$

Тут матриці A і B описують стан системи

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$$

де A – $n \times n$ матриця, а B – $n \times m$-матриця, а симетричні матриці Q і R задають критерій якості

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) \right].$$

У цьому випадку R додатно визначена, а Q додатно напіввизначена.

Ми зосередимо увагу на розв’язуванні рівняння (1).

2. ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СХЕМА

Нехай коефіцієнти та невідомі рівняння

$$XFX + AX + XB + C = 0 \tag{4}$$

є квадратними $m \times m$ матрицями з дійсними коефіцієнтами.

Введемо деякий параметр – діагональну невироджену матрицю $L = l \cdot E,$ $L \in R^{m \times m}$. Рівняння (4) помножимо зліва на L і отримаємо

$$LXFX + (LA + K - K)X + LXB + LC = 0$$

або

$$(LXF + LA + K)X = KX - (LXB + LC), \tag{5}$$

де $K = k \cdot E,\ K \in R^{m \times m}$ – діагональна невироджена матриця.

Припустимо тепер, що матриця $(LXF + LA + K)$ є невиродженою, тоді з (5) отримуємо

$$X = (LXF + LA + K)^{-1}(KX - LXB - LC) \tag{6}$$

або у вигляді рекурентної формули

$$X^n = (LX^{n-1}F + LA + K)^{-1}(KX^{n-1} - LX^{n-1}B - LC) \ \ (n = 1,2,\ldots). \tag{7}$$

Тобто алгоритм розв’язування рівняння (4) набуде вигляду.

1. Задати деяке мале число $\varepsilon > 0$.
2. Задати початкове наближення, деяку невироджену матрицю $X^{(0)} \in R^{m \times m}$.
3. Задати параметри $L = l \cdot E$ та $K = k \cdot E$, дійсні діагональні невироджені матриці розмірності $m \times m$.
4. Встановити лічильник $n = 1$;
5. За формулою (7) обчислити таке наближення $X^{(n)}$.
6. Перевірити виконання умови $\left\| X^{(n)} - X^{(n-1)} \right\| \le \varepsilon$: якщо $X^{(n)}$ не задовольняє цю умову збіжності, встановити $n = n+1$ і перейти на крок 5.

Нехай A і B дійсні квадратні $m \times m$ матриці, причому $\det B \ne 0$. Надалі добуток матриць $B^{-1}A$ будемо записувати у вигляді матричного дробу $\dfrac{A}{B}$.

Оскільки матриці L та K є діагональними , то з врахуванням введених вище позначеть, (6) можна подати у вигляді такого матричного дробу:

$$X = \frac{XK - XLB - CL}{XLF + AL + K}.$$

Виконаємо деякі елементарні перетворення.

$$X=\frac{XK-XLB-CL}{XLF+AL+K}=\frac{X(K-LB)-CL}{XLF+AL+K}=\frac{\left(X-CL(K-LB)^{-1}\right)(K-LB)}{\left(X+(AL+K)(LF)^{-1}\right)(LF)}=$$

$$=\frac{\left(X+(AL+K)(LF)^{-1}-(AL+K)(LF)^{-1}-CL(K-LB)^{-1}\right)(LF)(LF)^{-1}(K-LB)}{\left(X+(AL+K)(LF)^{-1}\right)(LF)}= \qquad (8)$$

$$=(LF)^{-1}(K-LB)-\frac{\left((AL+K)(LF)^{-1}+CL(K-LB)^{-1}\right)(K-LB)}{\left(X+(AL+K)(LF)^{-1}\right)(LF)}=$$

$$=(LF)^{-1}(K-LB)\quad-\quad\frac{(AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL}{AL+K+LXF}.$$

Отже, використовуючи закон композиції, з (8) одержимо розвинення X у матричний ланцюговий дріб

$$X=(LF)^{-1}(K-LB)-$$

$$-\frac{(AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL}{AL+2K+LF^{-1}BF-\dfrac{(AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL}{AL+2K+LF^{-1}BF-\dfrac{(AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL}{AL+2K+LF^{-1}BF-\ldots}}}.$$

Отож, невідомий розв'язок X можна подати у вигляді матричного ланцюгового дробу

$$X=(LF)^{-1}(K-LB)\quad-\quad\frac{(AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL}{AL+2K+LF^{-1}BF-\dfrac{(AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL}{AL+2K+LF^{-1}BF-\ldots}}$$

або

$$\begin{aligned}X&=(LF)^{-1}(K-LB)-\\&-\frac{(AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL|}{|AL+2K+LF^{-1}BF}-\\&-\frac{(AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL|}{|AL+2K+LF^{-1}BF}-\ldots\end{aligned} \qquad (9)$$

у компактній формі запису Прінгсгейма.

Дослідимо збіжність матричного ланцюгового дробу (9). Для цього розглянемо ланцюговий дріб із дійсними коефіцієнтами

$$\begin{aligned}&\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\frac{a_3|}{|b_3}+\ldots+\frac{a_n|}{|b_n}+\ldots=\\&=\frac{\frac{a_1}{b_1}\Big|}{|1}+\frac{\frac{a_2}{b_1}\Big|}{|b_2}+\frac{a_3|}{|b_3}+\ldots+\frac{a_n|}{|b_n}+\ldots=\\&=\frac{\frac{a_1}{b_1}\Big|}{|1}+\frac{\frac{a_2}{b_1b_2}\Big|}{|1}+\frac{\frac{a_3}{b_2}\Big|}{|b_3}+\ldots+\frac{a_n|}{|b_n}+\ldots=\end{aligned} \qquad (10)$$

$$=\frac{\frac{a_1}{b_1}\Big|}{\Big|1}+\frac{\frac{a_2}{b_1b_2}\Big|}{\Big|1}+\frac{\frac{a_3}{b_2b_3}\Big|}{\Big|1}+\ldots+\frac{\frac{a_n}{b_{n-1}b_n}\Big|}{\Big|1}+\ldots$$

Припускаючи, що матриця $AL+2K+LF^{-1}BF$ є невиродженою, застосуємо до (9) аналогічні до (10) перетворення

$$X=(LF)^{-1}(K-LB)-\frac{\left(AL+2K+LF^{-1}BF\right)^{-1}\left((AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL\right)\Big|}{\Big|E}-$$

$$-\frac{\left(AL+2K+LF^{-1}BF\right)^{-1}\left((AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL\right)\Big|}{\Big|AL+2K+LF^{-1}BF}-$$

$$-\frac{(AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL\Big|}{\Big|AL+2K+LF^{-1}BF}-\ldots-$$

$$-\frac{(AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL\Big|}{\Big|AL+2K+LF^{-1}BF}-\ldots=(LF)^{-1}(K-LB)\;-$$

$$-\frac{\left(AL+2K+LF^{-1}BF\right)^{-1}\left((AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL\right)\Big|}{\Big|E}-$$

$$-\frac{\left(AL+2K+LF^{-1}BF\right)^{-2}\left((AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL\right)\Big|}{\Big|E}-$$

$$-\frac{(AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL\Big|}{\Big|AL+2K+LF^{-1}BF}-\ldots-$$

$$-\frac{(AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL\Big|}{\Big|AL+2K+LF^{-1}BF}-\ldots=(LF)^{-1}(K-LB)\;- \tag{11}$$

$$-\frac{\left(AL+2K+LF^{-1}BF\right)^{-1}\left((AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL\right)\Big|}{\Big|E}-$$

$$-\frac{\left(AL+2K+LF^{-1}BF\right)^{-2}\left((AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL\right)\Big|}{\Big|E}-\ldots-$$

$$-\frac{\left(AL+2K+LF^{-1}BF\right)^{-2}\left((AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL\right)\Big|}{\Big|E}-\ldots$$

Для аналізу збіжності матричного ланцюгового дробу у формі (11) використаємо наведену в (4) узагальнену достатню ознаку Ворпіцького.

Теорема 1. Матричний гіллястий ланцюговий дріб

$$\sum_{k_1=1}^{n}\frac{A_{k_1}|}{|E}+\sum_{k_2=1}^{n}\frac{A_{k_1k_2}|}{|E}+\ldots+\sum_{k_l=1}^{n}\frac{A_{k_1k_2\ldots k_l}|}{|E}+\ldots$$

абсолютно збігається, якщо виконується умова

$$\left\|A_{k_1k_2\ldots k_l}\right\|\le\frac{1}{4n}\ \left(i=1,2,3,\ldots;\ k_i=1,2,\ldots,n\right).$$

Застосуємо Теорему 1 до матричного ланцюгового дробу (11). Легко бачити, що цей дріб абсолютно збігатиметься у разі виконання умови

$$\left\|\left(AL+2K+LF^{-1}BF\right)^{-2}\left((AL+K)(LF)^{-1}(K-LB)+CL\right)\right\|\le\frac{1}{4}.$$

3. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Запропонотваний вище алгоритм було реалізовано у середовищі FreeMat. Щоб продемонструвати його застосовність і ефективність, розглянемо такі приклади.

Приклад 1. Розглянемо матричне рівняння

$$XFX+AX+XB+C=0 \tag{12}$$

із коефіцієнтами

$$F=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & 12\end{pmatrix}$$

та невідомими X – дійсними некомутуючими матрицями розмірності 2×2.

Одним із точних розв'язків рівняння (12) є матриця $X=\begin{pmatrix}-6 & -17.3899\\ -1.6101 & -4\end{pmatrix}$.

Задамо початкове наближення $X^{(0)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ і застосуємо рекурентну формулу (7) для обчислення розв'язку (12). Отримаємо такі результати:

Таблиця 1

Результати обчислень рівняння (12)

ε	Кількість ітерацій	Наближений розв'язок
0.01	26	$\tilde{X}=\begin{pmatrix}-5.9995 & -17.3878\\ -1.6101 & -3.9998\end{pmatrix}$
0.001	29	$\tilde{X}=\begin{pmatrix}-6.0000 & -17.3900\\ -1.6102 & -4.0002\end{pmatrix}$
0.0001	34	$\tilde{X}=\begin{pmatrix}-6.0000 & -17.3900\\ -1.6101 & -4.0000\end{pmatrix}$
0.00001	41	$\tilde{X}=\begin{pmatrix}-6.0000 & -17.3899\\ -1.6101 & -4.0000\end{pmatrix}$

Ці результати підтверджують збіжність ітераційного процесу (7) до одного з точних розв'язків рівняння (12) зі зменшенням ε.

Приклад 2. Розглянемо матричне рівняння

$$XFX+AX+XB+C=0 \tag{13}$$

із коефіцієнтами

$$F=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -4 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -4 & -1\\ -4 & 5 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -8\\ 5 & 0 & -20\\ -6 & -19 & -24\end{pmatrix}$$

та невідомими X – дійсними некомутуючими матрицями розмірності 3×3.

Одним із точних розв'язків рівняння (13) є матриця $X=\begin{pmatrix}-2.7891 & -9.9624 & 5.5456\\ 0.7531 & 3.8621 & -0.3608\\ 2.7465 & 7.2856 & -1.4232\end{pmatrix}$. Задамо початкове наближення $X^{(0)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ і застосуємо рекурентну формулу (7) для обчислення розв'язку (13). Отримаємо такі результати:

Таблиця 2

Результати обчислень рівняння (13)

ε	Кількість ітерацій	Наближений розв'язок
0.01	72	$\tilde{X}=\begin{pmatrix}-2.7582 & -9.8750 & 5.4615\\ 0.7397 & 3.8242 & -0.3244\\ 2.7281 & 7.2333 & -1.3730\end{pmatrix}$
0.001	110	$\tilde{X}=\begin{pmatrix}-2.7860 & -9.9539 & 5.5373\\ 0.7518 & 3.8583 & -0.3572\\ 2.7447 & 7.2805 & -1.4183\end{pmatrix}$
0.0001	148	$\tilde{X}=\begin{pmatrix}-2.7888 & -9.9616 & 5.5447\\ 0.7530 & 3.8617 & -0.3604\\ 2.7464 & 7.2851 & -1.4227\end{pmatrix}$
0.00001	185	$\tilde{X}=\begin{pmatrix}-2.7890 & -9.9624 & 5.5455\\ 0.7531 & 3.8620 & -0.3607\\ 2.7465 & 7.2855 & -1.4231\end{pmatrix}$

Отже, ітераційний процес (7) збігається до одного з точних розв'язків рівняння (13) зі зменшенням ε.

4. ВИСНОВКИ

Розглянуто алгебричне рівняння Ріккаті. Запропоновано нову схему розв'язування таких рівнянь, отримано рекурентне співвідношення для знаходження їхніх наближених розв'язків над кільцем некомутуючих матриць. Наведено достатні умови збіжності матричних ланцюгових дробів, які використовують в обчислювальній схемі. Проведено чисельні експерименти, що підтверджують ефективність запропонованого алгоритму.

Список використаної літератури

1. *Калман Р.* Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М.: Едито-риал УРСС, 2004. – 400 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
3. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений / Под редакцией Д.К. Фадеева. – М.: Наука, 1984. – 192 с.
4. *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби / Д.И. Боднар. – К.: Наука, 1986. – 176 с.

Стаття: надійшла до редколегії 02.10.2015
доопрацьована 21.10.2015
прийнята до друку 28.10.2015

ITERATIVE METHOD SOLVING POLYNOMIAL EQUATIONS OF THE SECOND DEGREES

A. Nedashkovska

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: nastia.nedashkovska@gmail.com

This paper deals with the method for solving an algebraic Riccati equation. Recurrence formulas for finding approximate solutions of this matrix equation were obtained. The convergence of matrix continued fractions used in computer scheme was investigated. A series of numerical experiments that confirm the effectiveness of the proposed scheme were conducted.

Key words: iterative method, Riccati equation, convergence, matrix continued fractions.