

## ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ У ПРОСТОРІ ЗІ ЩІЛИНАМИ КОМБІНОВАНИМ МЕТОДОМ

Я. Гарасим, А. Дудикевич, Б. Остудін, Ю. Шунькін

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: [kom@franko.lviv.ua](mailto:korn@franko.lviv.ua)

Розглянуто мотиви застосування комбінованого методу до розв'язування крайових задач теорії потенціалу в електронній оптиці. Предмет досліджень – чисельне розв'язування осесиметричної задачі Діріхле для рівняння Лапласа в просторі зі щілинами. Враховуючи специфіку розглядуваної математичної моделі, доцільно застосовувати метод інтегральних рівнянь для переходу до внутрішніх крайових задач, щоб надалі ефективно розв'язувати методом сіток. Можливість такого підходу обґрунтована проведенням багатьох чисельних експериментів розрахунку реальних осесиметричних електростатичних полів.

*Ключові слова:* крайова задача, теорія потенціалу, простір зі щілинами, метод інтегральних рівнянь, метод сіток, чисельні експерименти, розрахунок осесиметричних електростатичних полів, комбінований метод.

### 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОБЛЕМИ

Нехай у евклідовому просторі  $\mathbf{R}^3$  міститься незамкнена поверхня  $S$ , обмежена кусково-гладким контуром скінченної довжини  $\partial S$ , тобто  $\bar{S} := S \cup \partial S$ . Припустимо, що  $S$  належить до класу поверхонь Ліпшиця. Через  $M, N, P \dots$  позначимо точки в  $\mathbf{R}^3$ . Розв'язок розглядуваної диференціальної задачі шукатимемо в необмеженій області  $\Omega_S^- := \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S}$  за припущенням двосторонності  $S$ , а саме, треба знайти функцію  $u \in H^1(\Omega_S^-, \Delta)$ , яка задовольняє умови

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega_S^-, \quad (1)$$

$$\delta^\pm u = g_\pm \text{ на } S, \quad (2)$$

$$\lim_{|P| \rightarrow \infty} u(P) = 0. \quad (3)$$

Тут  $\delta^\pm : H^1(\Omega_S^-) \rightarrow H^{1/2}(S)$  – оператори сліду;  $g_\pm \in H^{1/2}(S)$  – задані функції, у цьому разі  $g_\pm(M)$  – відомі значення шуканої функції в точці  $M$  на  $S$ , відповідно з додатного та від'ємного боків, а

$$H^1(\Omega_S^-, \Delta) := \left\{ u \mid u \in H^1(\Omega_S^-), \Delta u \in L_2(\Omega_S^-) \right\}.$$

Відомо [1], що за умов існування розв'язок  $u$  задачі (1)-(3) можна подати у такому інтегральному зображенні:

$$u(P) = \iint_S k(P, M) \sigma(M) dS_M - u_0(P), \quad P \in \Omega_S^-,$$

де  $k(P, M) := 1/\text{dist}(P, M)$ ,

$$u_0(P) := \iint_S \frac{\partial k(P, M)}{\partial n_M} [g] dS_M,$$

у цьому разі  $[g] := g_- - g_+ \in H_{00}^{1/2}(S)$ , а  $\sigma \in H_{00}^{-1/2}(S)$  – єдиний розв’язок інтегрального рівняння (IP)

$$K\sigma \equiv \iint_S k(P, M) \sigma(M) dS_M = F(P), \quad P \in S, \quad (4)$$

$$F := \frac{1}{2}(g_- + g_+) + u_0 \in H^{1/2}(S).$$

Отже, IP (4) еквівалентне задачі (1)-(3), а його розв’язність виявляється нерівностями

$$m_1 \|\sigma\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \leq \|K\sigma\|_{H^{1/2}(S)} \leq m_2 \|\sigma\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \quad (0 < m_1 \leq m_2).$$

У випадку електростатичної інтерпретації (1)-(3) вважаємо, що  $g_- = g_+$ . За цієї умови IP (4) дещо спрощується в такому розумінні, що  $F(P)$  виражає граничне значення потенціалу на  $S$  ( $F(P) \equiv \text{const}$ ). Суттєвим узагальненням задачі (1)-(3) є припущення, що  $S$  – це сукупність ліпшицевих кусково-гладких розімкнених поверхонь, які не мають спільних точок і обмежені кусково-гладкими контурами скінченної довжини в  $\mathbf{R}^3$ , тобто  $S := \bigcup_{i=1}^N S_i$ .

Основні мотиви застосування методу інтегральних рівнянь при чисельному аналізі задач типу (1)-(3) цілком зрозумілі. По-перше, це можливість визначення невідомих величин лише на поверхні  $S$ , яка міститься в необмеженій області; по-друге, зменшення розмірності розв’язуваної проблеми на одиницю, що є важливим для розгляду початкової задачі в суттєво-просторовому формулюванні. Однак такий метод у процесі застосування для вирішення комплексу проблем теорії потенціалу в електронній оптиці нееконічний з огляду на непомірне зростання витрат суто обчислювального характеру. Саме тому ефективним виявився так званий комбінований підхід [2]. Він дає змогу методом інтегральних рівнянь “замкнути” область, яка містить сукупність заряджених поверхонь, тобто перейти до розв’язування деякої внутрішньої задачі з відомими значеннями потенціалу в будь-якій точці отриманої межі. Такий спосіб дає підстави надалі з високою точністю, ефективно використовуючи метод сіток, виконувати чисельний аналіз основних характеристик досліджуваних електростатичних полів [3].

## 2. ПОДАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ВАРІАНТУ ЗАДАЧІ (1)-(3) У ВИГЛЯДІ СИСТЕМИ ОДНОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Не зменшуючи загальності, розглянемо осесиметричний варіант задачі (1)-(3). У випадку електростатичної інтерпретації для опису відповідного поля запровадимо циліндричну систему координат  $(z, r, \varphi)$ . Досліджуване поле не залежить від координати  $\varphi$ . Тому інформацію щодо форми заряджених електродів, змодельованих сукупністю розімкнених поверхонь  $S$ , задамо параметричним зображенням у напівплощині  $zr$  ( $r > 0$ ) твірних  $L_i$ , які обертанням навколо осі  $Oz$  утворюють бічні поверхні  $S_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ) деяких круглих циліндрів.

Нехай  $L_i := \{z_i = z_i(\tau), r_i = r_i(\tau), \alpha_i \leq \tau \leq \beta_i, i = \overline{1, N}\}$ . Функції  $z_i(\tau)$  і  $r_i(\tau)$  вважатимемо, як мінімум, гладкими на  $(\alpha_i, \beta_i)$ . Застосовуючи метод інтегральних

рівнянь розв'язування спрощеного варіанту задачі, (1)-(3) зводиться до такої системи операторних рівнянь:

$$(A\bar{q})(\bar{\tau}) = \bar{U}_0(\bar{\tau}) = U_0^{(i)}, \quad \bar{\tau} \in (\alpha_i, \beta_i) \quad (i = \overline{1, N}). \quad (5)$$

Тут

$$\bar{q}(\tau) := (q_1(\tau), \tau \in [\alpha_1, \beta_1]; q_2(\tau), \tau \in [\alpha_2, \beta_2]; \dots; q_N(\tau), \tau \in [\alpha_N, \beta_N])^T$$

– сукупна густина розподілу зарядів на  $L := \bigcup_{j=1}^N L_j$ ;

$$\bar{U}_0(\bar{\tau}) := (U_0^{(1)}, U_0^{(2)}, \dots, U_0^{(N)})^T,$$

де  $U_0^{(i)} = \bar{U}_0(\bar{\tau})$ ,  $\bar{\tau} \in [\alpha_i, \beta_i]$  ( $i = \overline{1, N}$ ), – граничні значення потенціалів на  $L_i$ . У (5)  $A$  є матрицею інтегральних операторів, тобто  $A := (A_{ij})_{i,j=1}^N$ , які діють за правилами:

$$(A_{ij}q_j)(\bar{\tau}) \equiv \int_{\alpha_j}^{\beta_j} E_{ij}(\tau, \bar{\tau}) q_j(\tau) d\tau, \quad \bar{\tau} \in (\alpha_i, \beta_i),$$

у цьому разі

$$E_{ij}(\tau, \bar{\tau}) := 4r_j(\tau) \{ [r'_j(\tau)]^2 + [z'_j(\tau)]^2 \}^{1/2} K(\eta_{ij}) T_{ij}^{-1}(\tau, \bar{\tau}),$$

де

$$T_{ij}(\tau, \bar{\tau}) := \{ [r_j(\tau) + r_i(\bar{\tau})]^2 + [z_j(\tau) - z_i(\bar{\tau})]^2 \}^{1/2},$$

а

$$K(\eta_{ij}) := \sum_{l=0}^4 a_l \eta_{ij}^l - \ln(\eta_{ij}) \sum_{l=0}^4 b_l \eta_{ij}^l,$$

$$\eta_{ij} := \eta_{ij}(\tau, \bar{\tau}) = \{ [r_j(\tau) - r_i(\bar{\tau})]^2 + [z_j(\tau) - z_i(\bar{\tau})]^2 \} T_{ij}^{-2}(\tau, \bar{\tau}),$$

– є апроксимацією повного еліптичного інтеграла першого роду [4].

Систему (5) можна вважати певним ІР, яке належить до класу рівнянь зі слабкою (логарифмічною) особливістю в ядрі. Розв'язок такого ІР, опираючись на фізичні міркування, розглядаємо як елемент декартового добутку модифікованих просторів Гьольдера  $H_{\mu_i}^*(\Delta_i)$ , де  $\Delta_i := (\alpha_i, \beta_i)$ ,  $0 < \mu_i \leq 1$  ( $i = \overline{1, N}$ ) [3, 5].

Отже, нехай  $\bar{q}(\tau) \in \prod_{i=1}^N H_{\mu_i}^*(\Delta_i)$ . Нагадаємо, що  $q_i(\tau) \in H_{\mu_i}^*(\Delta_i)$  тоді і лише

тоді, коли  $q_i(\tau)$  можна подати у вигляді  $\hat{q}_i(\tau)/\omega_i(\tau)$ , де  $\hat{q}_i(\tau)$  належить до простору неперервних функцій  $H_{\mu_i}(\Delta_i)$ , що задовольняють умову Гьольдера з показником  $\mu_i$ , а  $\omega_i(\tau) := (\tau - \alpha_i)^{n_i} (\beta_i - \tau)^{m_i}$  ( $0 \leq n_i, m_i < 1$ ).

### 3. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ (3) ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ПОДАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ (1)-(3) З ГАРАНТОВАНОЮ ТОЧНІСТЮ

Для одержання наближеного розв'язку ІР (5) застосовували метод Боголюбова-Крилова [6] (метод колокації з апроксимацією невідомої густини розподілу зарядів кусково-постійними базисними функціями), який допускає, що шукані густини  $q_i(\tau)$  мало змінюються в досить маленькому околі будь-якої точки  $\tau \in [\alpha_i, \beta_i]$  ( $i = \overline{1, N}$ ). У

контексті наведених вище міркувань щодо характеру поведінки  $q_i(\tau)$  легко бачити, що потрібною властивістю володіє функція  $\hat{q}_i(\tau) = q_i(\tau)\omega_i(\tau)$ .

Розв'язуючи чисельно IP (5), отримаємо змогу знаходити потенціал електростатичного поля в будь-якій точці  $(\bar{z}, \bar{r})$  простору  $\mathbf{R}^2$  ( $(\bar{z}, r) \in L$ ). Для цього використовуємо відповідний дискретний аналог інтегрального зображення розв'язку задачі (1)-(3)

$$U(\bar{z}, \bar{r}) = \sum_{j=1}^N \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{\hat{q}_j(\tau)}{\omega_j(\tau)} E_{ij}(\tau, \bar{\tau}) \Big|_{\substack{z_i(\bar{\tau})=\bar{z}, \\ r_i(\bar{\tau})=\bar{r}, \\ i=1, N}} d\tau.$$

Точність отримуваних наближених розв'язків IP (5) оцінюємо апостеріорно шляхом перевірки задоволення крайових умов у точках твірних  $L_i$  ( $i=1, N$ ), що лежать між точками колокації запровадженого методу Боголюбова-Крилова. Поза тим, у процесі побудови дискретного аналога IP (5) використовуємо послідовність нерівномірних сіток, що згущуються в околі особливих точок розімкнених контурів  $L_i$  ( $i=1, N$ ). Це допомагає забезпечити гарантовану точність отримуваних на межі замикання прямокутної області значень потенціалів, передбачувану відповідними оцінювачами [7] (див. рис. 1).

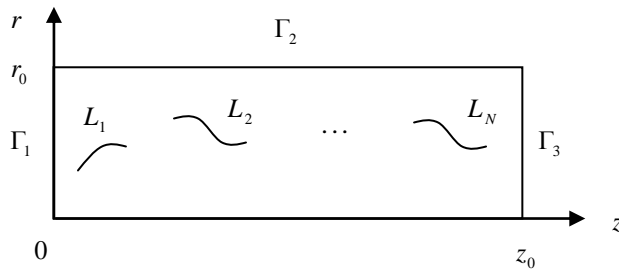


Рис. 1. Прямокутна область, на межі якої  $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)$  методом інтегральних рівнянь отримано граничні значення потенціалів

#### 4. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СІТОК ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ

Повертаючись до практики математичного моделювання електронно-променевих приладів, зазначимо, що для розрахунку електронно-оптичних систем (ЕОС) які є важливими компонентами названих приладів, методом сіток апроксимацію рівняння (1), зазвичай виконують з точністю  $O(h^2)$  на шаблоні типу “хрест”. Використовуючи для розв'язування отриманих різницевих рівнянь метод верхньої релаксації за лініями, подамо їх у вигляді

$$a_i u_{i,j-1}^{(n+1/2)} - b_i u_{i,j}^{(n+1/2)} + c_i u_{i,j+1}^{(n+1/2)} = - (d_i u_{i-1,j}^{(n+1)} + e_i u_{i+1,j}^{(n)}), \quad (6)$$

$$u_{i,j}^{(n+1)} = w_i u_{i,j}^{(n+1/2)} + (1 - w_i) u_{i,j}^{(n)}, \quad (7)$$

де

$$a_i := \frac{1}{h^2}, b_i := \frac{4}{h^2}, c_i := \frac{1}{h^2}, d_i := \frac{1}{h^2} \left( 1 - \frac{h}{2r_i} \right),$$

$$e_i := \frac{1}{h^2} \left( 1 + \frac{h}{2r_i} \right), r_i = ih, i = 1, 2, 3, \dots$$

– для квадратної сітки ( $h$  – крок сітки по  $r$  і  $z$ );  $w_i$  – оптимальне значення параметра релаксації. На осі симетрії (при  $i = 0$ ) коефіцієнти  $a_0, b_0, c_0, e_0$  і  $d_0$  мають таке зображення:

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{h^2}, b_0 := \frac{6}{h^2}, d_0 = 0, e_0 := \frac{4}{h^2}.$$

Зауважимо, що вибір невеликого порядку апроксимації рівняння (1) в цьому випадку узгоджено з порядком апроксимації потенціалу, отриманого методом Боголюбова-Крилова на підставі дискретного аналогу його інтегрального подання.

Послідовні наближення блочного методу для скінченно-різницевого аналога четвертого порядку можна подати в такому зображенні:

$$a_i u_{i,j-1}^{(n+1/2)} - b_i u_{i,j}^{(n+1/2)} + c_i u_{i,j+1}^{(n+1/2)} =$$

$$= e_i u_{i+1,j}^{(n)} + d_i u_{i-1,j}^{(n+1)} + k_i \left( u_{i+1,j+1}^{(n)} + u_{i+1,j-1}^{(n)} \right) + l_i \left( u_{i-1,j+1}^{(n+1)} + u_{i-1,j-1}^{(n+1)} \right), \quad (8)$$

$$u_{i,j}^{(n+1)} = w_i u_{i,j}^{(n+1/2)} + (1 - w_i) u_{i,j}^{(n)}, \quad (9)$$

де

$$a_i = c_i := \frac{2}{3h^2}, b_i := \frac{1}{3h^2} \left( 10 - \frac{2}{4i^2 - 1} \right), d_i := \frac{1}{3h^2} \left( 2 - \frac{1}{i} - \frac{1}{4i^2 - 2i} \right),$$

$$k_i := \frac{1}{6h^2} \left( 1 + \frac{1}{2i} \right), l_i := \frac{1}{6h^2} \left( 1 - \frac{1}{2i} \right), e_i := \frac{1}{3h^2} \left( 2 + \frac{1}{i} - \frac{1}{4i^2 + 2i} \right), i = 1, 2, 3, \dots$$

– для квадратної сітки ( $h$  – крок сітки по  $r$  і  $z$ );  $w_i$  – оптимальне значення параметра релаксації. На осі симетрії (при  $i = 0$ ) коефіцієнти  $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, k_0, l_0$  мають таке зображення:

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{3h^2}, b_0 := \frac{13}{3h^2}, d_0 = 0, e_0 := \frac{20}{9h^2}, k_0 := \frac{2}{3h^2}, l_0 := \frac{1}{9h^2}.$$

Різницеві рівняння (6), (8) є системами лінійних алгебричних рівнянь високого порядку зі стрічковими матрицями. Ці системи розв'язували методом верхньої релаксації за лініями (7), (9) відповідно до відомої методики [8].

## 5. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

На практиці досить часто виникає потреба розрахувати електростатичне поле поодинокі електронної лінзи. Розглянемо одну з таких лінз, яку можна охарактеризувати такими значеннями запроваджених вище параметрів:  $\alpha_1 = 0,4$ ;  $\beta_1 = 1,6$ ;  $\alpha_2 = 1,45$ ;  $\beta_2 = 2,3$ ;  $\alpha_3 = 2,55$ ;  $\beta_3 = 3,55$ ;  $r_1 = 0,35$ ;  $r_2 = 0,65$ ;  $r_3 = 0,65$ ;  $U_0^{(1)} = 1$ ;  $U_0^{(2)} = 0$ ;  $U_0^{(3)} = 1$ . Легко бачити, що розглядувана ЕОС утворена трьома ( $N = 3$ ) бічними поверхнями круглих циліндрів, які мають спільну вісь  $Oz$ . Зауважимо, що досліджувану область замикали двома способами: 1) при  $z_0 = 3,95$  і

$r_0 = 1,95$  ( $z_0 = 7,9$  і  $r_0 = 3,9$ ) з нульовими значеннями потенціалів на межі замикання;  
 2) комбінованим методом (див. рис. 2, 3).

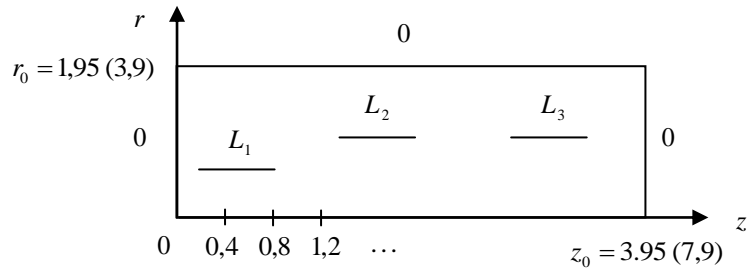


Рис. 2. Замикання області у випадку застосування методу сіток із нульовими значеннями на межі

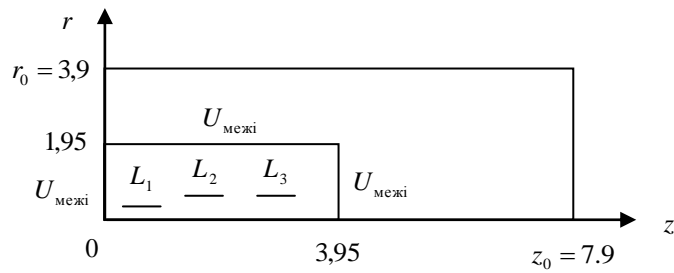


Рис. 3. Замикання області  $[0: 3,95] \times [0: 1,95]$  у випадку застосування комбінованого методу

Таблиця 1

Значення, які отримали методом ІР на межі замикання

$y = \frac{1,95}{x}$	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	3,95
128 елм.	0,2414	0,2471	0,2486	0,2523	0,2653	0,2877	0,3099	0,3204	0,3148	0,2993
256 елм.	0,2413	0,2470	0,2486	0,2522	0,2653	0,2877	0,3098	0,3203	0,3147	0,2992

Результати обчислень подані у табл. 1, 2. В табл. 1 наведені результати обчислень у випадку вибору на сукупності твірних 128 елементів зі згущенням сітки в околі крайніх точок розімкнених контурів  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  та за наявності 256 елементів з використанням рівномірного поділу твірних. В табл. 2 наведені наближені значення розв'язку на осі симетрії, отримані за допомогою методу сіток, методу ІР та комбінованим методом.

Таблиця 2

## Значення на осі симетрії

$z$ ( $r=0$ )	Метод сіток ( $h=0,025$ )		Метод ІР (256 елементів)	
	$U_{\text{межі}}=0$ ( $z_0=3,95, r_0=1,95$ )	$U_{\text{межі}}=0$ ( $z_0=7,9, r_0=3,9$ )	$U_{\text{межі}}$ ( $z_0=3,95, r_0=1,95$ )	$U_{\text{межі}}$ та м-д сіток ( $h=0,025$ )
0,4	0,6957	0,6964	0,8398	0,8401
0,8	0,9722	0,9723	0,9845	0,9844
1,2	0,9747	0,9748	0,9756	0,9756
1,6	0,7380	0,7386	0,7383	0,7391
2,0	0,3720	0,3742	0,3768	0,3762
2,4	0,5107	0,5182	0,5214	0,5213
2,8	0,7842	0,8050	0,8088	0,8090
3,2	0,8026	0,8817	0,8929	0,8930
3,6	0,4882	0,7553	0,7904	0,7901

Порівняння результатів, які отримали “чистим” методом ІР і комбінованим методом, ілюструють достовірність розрахунків та доцільність застосування комбінованої методики.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Sybil Yu.M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface / Yu.M. Sybil // *Мат. студії.* – 1997. – Т. 8, № 2. – С. 79-96.
2. Дудыкевич А.Т. Комбинированный метод решения внешних осесимметричных краевых задач теории потенциала / А.Т. Дудыкевич, И.В. Людкевич, Б.А. Остудин // *Теоретическая электротехника.* – 1984. – Вып. 36. – С. 79-84.
3. Ильин В. П. Численные методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем / В. П. Ильин, В. А. Катешов, Ю. В. Куликов, М. А. Монастырский. – Новосибирск: Наука, 1987. – 192 с.
4. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
5. Галишникова Т. Н. Метод интегральных уравнений в задачах дифракции волн / Т. Н. Галишникова, А. С. Ильинский. – М.: МАКС Пресс, 2013. – 248 с.
6. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1952. – 696 с.
7. Garasym Ya.S. A posteriori error estimate for some two-dimensional integral equations of the first kind on unclosed surfaces in potential theory/ Ya.S. Garasym, B.A. Ostudin // *J. Numer. Appl. Math.* – 2009. – Vol. 97, No 1. – P. 57-69.
8. Людкевич И.В. Об одном методе решения внешних краевых задач теории потенциала / И.В. Людкевич, А.Т. Дудыкевич // *Теоретическая электротехника.* – 1980. – Вып. 29.

Стаття: надійшла до редколегії 11.11.2015  
доопрацьована 09.12.2015  
прийнята до друку 23.12.2015

**NUMERICAL SOLUTION OF SOME POTENTIAL THEORY BOUNDARY  
VALUE PROBLEMS IN THE SPACE WITH CRACKS BY MEANS OF  
COMBINED METHOD**

**Ya. Garasym, A. Dudykevych, B. Ostudin, Yu. Shunkin**

*Ivan Franko National University of Lviv,  
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: [kom@franko.lviv.ua](mailto:kom@franko.lviv.ua)*

The motives of combined method application for potential theory boundary value problems solving in electron optics are considered. The main unit of our investigation is numerical solution of Dirichlet problem for Laplace equation in the space with cracks. Taking into account the specificity of considered mathematical model, the integral equations method is adapted for transition to interior boundary value problems. In addition, the main reason of this operation is to obtain later the effective solutions by difference approximation method. The possibility of such approach was justified with the help of numerical tests ment for actual axially symmetric electrostatic fields calculation.

*Key words:* boundary value problem, potetial theory, space with cracks, integral equations method, difference approximation method, numerical tests, axially symmetric electrostatic fields calculation, combined method.