

## ДО РОЗРАХУНКУ ТУРБУЛЕНТНИХ ПРИМЕЖЕВИХ ШАРІВ

**В. Мамчук**

*Національний авіаційний університет,  
проспект Комарова, 1, Київ, 03580, e-mail: [vimamchuk@ukr.net](mailto:vimamchuk@ukr.net)*

Наведено модель і результати з математичного моделювання деяких видів турбулентних пристінних течій. Розрахунки виконано безітераційним скінченно-різницеvim маршеvim методом з другим порядком точності за обома координатами. Проведено зіставлення розрахункових результатів у різних перерізах уздовж розвитку течії з експериментальними даними демонструють задовільну збіжність.

*Ключові слова:* примежевий шар, турбулентна пристінна течія (струміль), профіль швидкості, маршевий метод, сплайн.

### 1. ВСТУП

Математичне моделювання складних турбулентних пристінних течій, які виникають під час застосування пристроїв і транспортних засобів, що використовують крило як рушій або несучий чи керуючий елемент, не можливе без розуміння природи розвитку течії в примежевому шарі (ПШ). Примежеві пристінні струмені – ефективний засіб керування ПШ, який активно застосовують у аерогідродинаміці. З математичного погляду розрахунок таких течій є серйозною проблемою сьогодні [1-12], оскільки в практичних задачах їх потрібно розглядати як турбулентні, а характеристики турбулентності залежать від геометрії притаманного пристінному струменю немонотонного профілю поздовжньої складової осередненої швидкості. Крім того, реальна обтічна поверхня має певні особливості (кривизна, шорсткість тощо) і взаємодіючи з потоком, впливає на формування пристінної струменевої течії.

Математичне моделювання турбулентних стаціонарних нестисливих примежевих шарів і пристінних струменів, що розвиваються вздовж поверхонь, які можуть бути гладкими або шорсткими (шорсткість розглядається у вигляді канавок квадратної форми, розташованих паралельно або перпендикулярно до напрямку розвитку течії) – науковий напрям автора. Мета нашої праці – подати доробок автора на шляху вдосконалення розрахункових методів і математичної моделі [2], яка має деякі переваги над іншими (описує якомога більше видів турбулентних пристінних течій).

### 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗГЛЯДУВАНИХ ВИДІВ ТЕЧІЙ

ПШ – найрозповсюдженіший вид течії в'язкої рідини, система диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описує його та пристінний струміль, набуває вигляду

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

де  $u$ ,  $v$  – проєкції швидкості на осі  $Ox$  та  $Oy$ , відповідно.

Високоєфективний безітераційний метод розрахунку системи рівнянь (1), який ґрунтується на різницевій схемі з підвищеними стабілізуючими властивостями, описано в [2]. У цій праці проведено дослідження з адаптації цього методу на зазначені вище розрахункові випадки.

Найдовершеніша модель, яка досить детально та суттєво враховує накопичені відомості про структуру та властивості деяких видів пристінних течій і процеси турбулентного перемішування в них – це модель турбулентної в'язкості, яку розробив автор.

Оскільки профіль осередненої швидкості для течії, яку вивчають, має складну форму, то для описування коефіцієнта турбулентної в'язкості  $\mu_t$  (на першому етапі) для кожної з ділянок використовували співвідношення з [1-7]:

– для початкової ділянки

$$\mu_t = \chi \rho \delta u_H \gamma \operatorname{th} \frac{l \sqrt{\bar{\tau}}}{\chi \delta u_H}, \quad l = ky \operatorname{th} \frac{\operatorname{sh}^2(\chi_1 y^+) \operatorname{th}(\operatorname{sh}^2(\chi_2 y^+))}{ky \sqrt{\bar{\tau}}}, \quad (2)$$

– для струменевої та слідної ділянок

$$\mu_t = \begin{cases} \rho \chi_{\text{ст}} \delta_{\text{ст}} (u_{\text{max}} - u_{\text{min}}) \gamma & \text{при } \delta_{\text{max}} \leq y \leq \delta_1, \\ \rho \chi_{\text{сл}} \delta_{\text{сл}} (u_{\text{min}} - u_h) \gamma & \text{при } \delta_1 < y \leq \delta, \end{cases} \quad (3)$$

де  $k$ ,  $\chi$ ,  $\chi_1, \chi_2$  – коефіцієнти моделі;  $\delta$  – товщина примежевого шару або пристінного струменя;  $l$  – довжина ділянки змішування;  $\rho$  – густина;  $u_H$  – значення швидкості на зовнішній межі ПШ (струменя);  $\bar{\tau}$  – безрозмірне напруження тертя в околі стінки

$$\bar{\tau} = \begin{cases} 1 + \Phi_1 \eta & \text{при } \Phi_1 \geq 0, \\ \frac{1}{1 - \Phi_1 \eta} & \text{при } \Phi_1 < 0; \end{cases} \quad \Phi_1 = \frac{\delta}{\tau_w} \frac{dp}{dx}$$

– формпараметр К. К. Федяєвського;  $p$  – тиск;  $\tau_w$  – значення дотичного напруження тертя на поверхні;  $\eta = y/\delta$ ;  $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$  – динамічна швидкість;  $y^+ = y v_* \rho/\mu$ ;  $\gamma = \sqrt{1-\eta}$  – функція, яка враховує переміжність течії;  $\chi_{\text{ст}}$ ,  $\chi_{\text{сл}}$  – емпіричні сталі моделі;  $\delta_{\text{ст}}$  і  $\delta_{\text{сл}}$  – товщини струменевої та слідної ділянок, відповідно.

За  $k$  приймали відому формулу з [11]

$$k = 0,4 + 0,182275 \cdot (1 - e^{-0,32068 \Phi_1}).$$

Коефіцієнти  $\chi$ ,  $\chi_i$  брали з [1-7].

У рамках розрахункового методу виявилась доцільною модифікація, яка пов'язана з використанням сплайнів для задання початкових і граничних умов на зовнішній межі турбулентного ПШ, зокрема в [11] їх з успіхом застосували для інтерполяції табличної функції, яка описує форму профілю крила літака.

Чисельні розрахункові експерименти виявили, що співвідношення (2) із [1] можна використовувати тільки для певних безградієнтних ПШ (у цьому випадку від нього можна взагалі відмовитися, застосувавши “стару” модель Прандтля, оскільки

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sh } \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{th } \alpha}{\alpha} = 1$ ), тоді як (3) – автора застосовне і для моделювання пристінного струменя. Для багатьох практичних задач треба моделювати течії, які розвиваються в діапазоні від значних додатних до від’ємних градієнтів тиску. Зокрема, найцікавіші дослідження течій, які формуються під впливом значних додатних градієнтів тиску, що приводять до виникнення небажаного на практиці явища відриву турбулентного ПШ. Тому для поширення можливостей моделі (2, 3), щодо використання її для більш широкого кола прикладних задач, потрібні додаткові дослідження й уточнення деяких залежностей модельних коефіцієнтів від параметрів течії, що враховують градієнт тиску. Що і виконували на наступних етапах чисельних експериментів.

Для цього проводили модифікації не лише коефіцієнтів моделі (2, 3), а й її структури. Чисельні експерименти, проведені за викладеною методикою, дали змогу у випадку обчислення характеристик градієнтних течій в першому наближенні запропонувати такі формули:

$$\mu_l = \chi \rho \delta u_H \gamma \ln \left( \frac{l \sqrt{\tau}}{\chi \delta u_H / v_*} + 1 \right), \quad l = ky; \quad (4)$$

$$k = 0,223 + 0,121 \arctg \frac{du_H}{dx}, \quad \chi = 0,01 + \frac{1}{75 + (2,5 + \Phi_1)^2}. \quad (5)$$

Попередні розрахунки порівнювали з відомим експериментальним матеріалом [8] і [12], виявили обнадійливі результати, які дали змогу зробити висновок про доцільність продовження чисельних експериментів для уточнення формул (4) – допомагає уникнути використання емпіричних коефіцієнтів  $\chi_1$  і  $\chi_2$ , та (5) з використанням ширшого обсягу експериментального матеріалу. Тому провели чисельні експерименти і за формулою (2), що дає змогу уже на теперішньому етапі для  $k$  запропонувати формулу (5), в якій перший числовий доданок у правій частині замінюється на 0,4 та формулою (4), в якій  $l$  брали з (2). Завдяки цьому дещо поліпшувалися розрахункові результати. Такі ж експерименти проводять за формулою, яка аналогічна (2), в якій  $\text{th}$  замінюється на  $\arctg$  але, відповідно, з іншими модельними коефіцієнтами  $k$ ,  $\chi$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ .

Результати обчислень порівнювали з результатами інших авторів, зокрема [1], які мають перевагу над іншими і виявили більшу відповідність розрахункових значень експериментальним даним, а отже, підтвердили доцільність запропонованих вище модифікацій.

### 3. РЕЗУЛЬТАТИ ТЕСТУВАННЯ

У наведених ілюстраціях розрахунків прийнято єдиний принцип подання розрахункової інформації для демонстрації результатів моделювання, тобто наводяться порівняння розрахованих розподілів швидкості  $\bar{u}(y)$   $\bar{u} = u/u_H$ ,  $\bar{x} = x/L$ ,  $\bar{y} = y/L$ ,  $\bar{u} = \bar{u}(\bar{y})|_{x=x_0}$  – початкові умови;  $L$  – характерний розмір обтічної поверхні з наявними з експериментальних робіт вимірними профілями швидкості в різних перерізах уздовж напрямку розвитку ПШ чи пристінного струменя. Таке порівняння

локальних розподілів швидкості має перевагу над порівнянням розподілів уздовж координати  $x$  інтегральних характеристик

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{u}{u_H} \right) dy$$

– товщина витіснення та

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_H} \left( 1 - \frac{u}{u_H} \right) dy$$

– товщина втрати імпульсу, які на кожному кроці знаходили за допомогою квадратурної формули Сімпсона, досліджуваних течій, бо дає змогу простежити характер відтворення розрахунковим методом деформації профілю швидкості під впливом умов розвитку течії. Розрахунки обох течій проводили за власною моделлю турбулентності.

На рис. 1 зображено порівняння, яке демонструє практично точне відтворення розрахунком тенденцій деформації профілів швидкості уздовж координати  $\bar{x}$ , що спостерігали експериментально у розвитку примежевого шару ід. 1100 – незрівноважена течія, яка формується під впливом додатного градієнта тиску (Г. Людвіг, В. Тіллман).

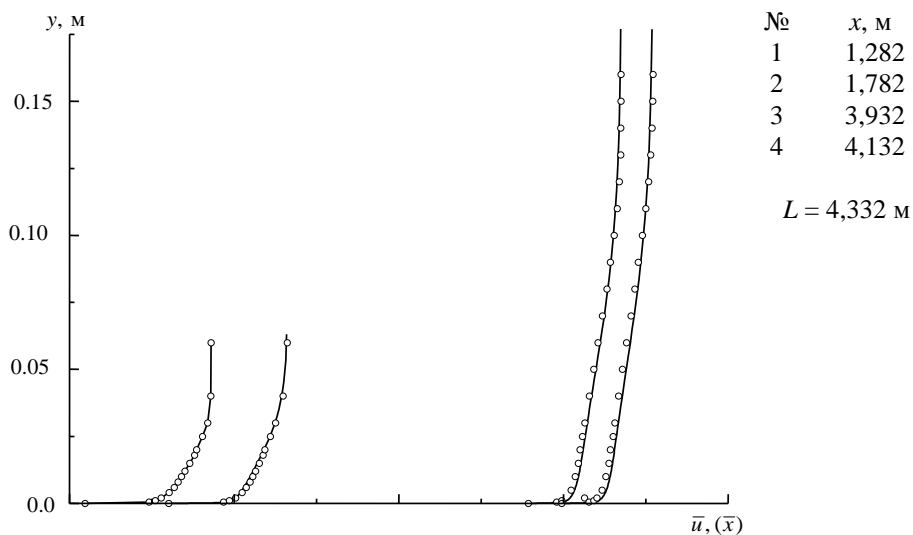


Рис. 1. Розподіл швидкості  $\bar{u} = f(y)$  у поздовжніх перерізах  $\bar{x} = const$ : лінії – розрахунки; кола – експериментальні дані (ід. 1100) [12]

Сліди, які утворюються за окремими елементами крила, розташованими над обтічною поверхнею, взаємодіють з примежевим шаром на його поверхні. Математичні моделювання такої взаємодії сліду з примежевим шаром мають особливу практичну цінність, оскільки вони потрібні для оптимізації форми профілю

крила, передкрилка та закрилка. Крім того, дослідження механізмів взаємодії має важливе значення для поглибленого розуміння природи турбулентності.

Тому на рис. 2 зображено результати порівняння чисельних розрахунків з експериментальними даними праці [8] – взаємодії сліду з примежевим шаром: слід є результатом злиття примежевих шарів, які утворилися на верхній і нижній поверхнях симетричного профілю NACA 0012 (довжина хорди 100 мм,  $d$  – висота щілини між обтічною поверхнею та профілем), встановленим під нульовим кутом атаки. Зауважимо, що і в цьому випадку застосовані модель і метод дали змогу фізично коректно змоделювати основні властивості, притаманні розглянутому виду пристінної течії, що підтверджує відтворений шлях розрахунку, поступовий перехід від немонотонних профілів швидкості, характерних для пристінних струменів до монотонних розподілів, притаманних ПШ.

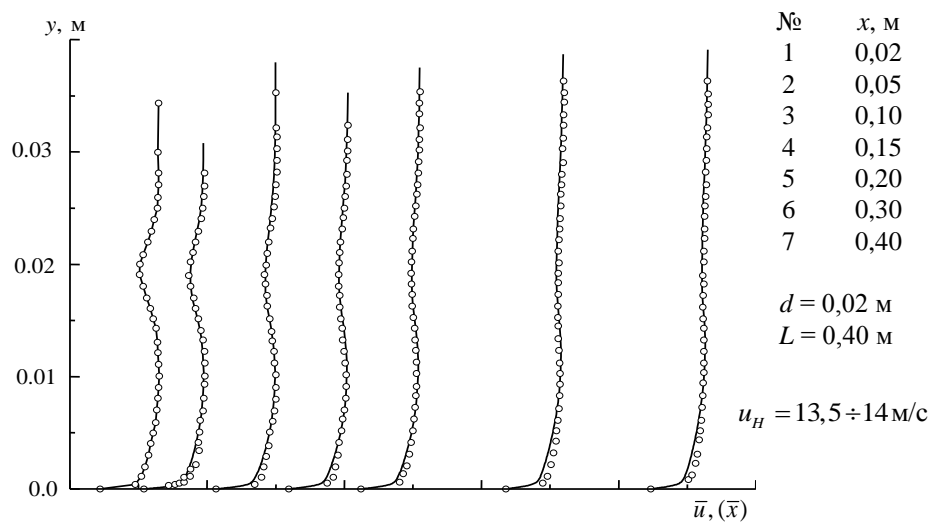


Рис. 2. Розподіл швидкості  $\bar{u} = f(y)$  в сліді за профілем NACA 0012, що занурений у турбулентний примежевий шар гладкої поверхні у поздовжніх перерізах  $\bar{x} = \text{const}$ : *лінії* – розрахунки; *кола* – експериментальні дані [8]

Для зображених на рис. 1 і 2 порівнянь досягнуто задовільну відповідність розрахункових і експериментальних розподілів швидкості. Це свідчить про працездатність отриманої моделі та підходів моделювання розглянутих видів турбулентних пристінних течій.

#### 4. ВИСНОВКИ

1. Порівняння розрахункових результатів з відомими експериментальними даними засвідчують, що запропоновані підходи з математичного моделювання розглянутих видів турбулентних течій дають змогу моделювати течії адекватно до їхніх фізичних властивостей.

2. Розроблена математична модель для розрахунку турбулентних примежевих шарів і пристінних струменів дає підстави розраховувати складний і практично цінний вид течії – слід за тілом, розташованим у примежевому шарі гладкої поверхні, що дає змогу сподіватися на подальші узагальнення запропонованих підходів на складніші види течій.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Мовчан В. Т. Расчет турбулентного пограничного слоя на основе единого представления турбулентной вязкости поперек пограничного слоя / В. Т. Мовчан, Б. Д. Захарюгин // Прикладная аэродинамика, 1979. – С. 38–44.
2. Мамчук В. І. Модель турбулентності та результати розрахунків плоских турбулентних пристінних струменів / В. І. Мамчук // Вісн. КМУЦА. – Київ: КМУЦА. – 1998. – № 1. – С. 291–294.
3. Лунис М. Алгебраические модели турбулентной вязкости и теплопроводности в расчетах пристенных турбулентных течений / М. Лунис, В. И. Мамчук, В. Т. Мовчан, Л. А. Романюк, Е. О. Шквар // Прикладна гідромеханіка. – 2001. – Т. 3. (75), № 1. – С. 37–45.
4. Мамчук В. І. Математичне моделювання розвитку турбулентних примежевих шарів та пристінних струменів на пластині, які коливаються / В. І. Мамчук // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2002. – 4 (24). – С. 65–67.
5. Мамчук В. І. Математичне моделювання розвитку турбулентних пристінних течій на тілах, які коливаються / В. І. Мамчук // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2002. – Вип. 4. – С. 131–136.
6. Мамчук В. І. Розрахунок турбулентного примежевого шару на лопатках робочого колеса центробіжного компресора / В. І. Мамчук // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2012. – Вип. 17. – С. 131–134.
7. Mamchuk V. Research and mathematical modeling of turbulent boundary layer at positive pressure gradient / V. Mamchuk, I. Lastivka, O. Bezverkhyy // Proceedings of the National Aviation University. – 2016. – № 2 (67). – 37–43.
8. Тулапуркара Э. Г. Взаимодействие пограничного слоя со следами тел различной формы / Э. Г. Тулапуркара, В. Рамжи, Р. Раджасекар // Аэрокосмическая техника. – 1990. – № 12. – С. 3–10.
9. Хинце И. О. Турбулентность / И. О. Хинце. – Москва: Физматгиз, 1963. – 680 с.
10. Хорстмен. Модель турбулентности для расчета неравновесных течений при положительном градиенте давления / Хорстмен // Ракет. техника и космонавтика, 1977. – 15, № 2. – С. 5–7.
11. Ahlbery J. H. Theory of Splines and Their Applications / J. H. Ahlbery, E. N. Nilson, J. L. Walsh. – New York, 1967.
12. Computation of turbulent boundary layer. – Proceedings AFOSR–IFR–Stanford Conference. – Vol. 1. – Ed. Kline S. I., Morcovin M. V., Sovran G., Cockrell D. I. – 1968. – Vol. 2. – Ed. Coles D. E., Hirst E. A. – 1969. – 519 p.

Стаття: надійшла до редколегії 16.11.2016

доопрацьована 17.05.2017

прийнята до друку 14.06.2017

---

## **THE CALCULATION OF TURBULENT BOUNDARY LAYERS**

**V. Mamchuk**

*National Aviation University,*

*Komarov Av., 1, Kyiv, 03580, e-mail: [vimamchuk@ukr.net](mailto:vimamchuk@ukr.net)*

The model and results of mathematical modeling of some types of turbulent near-wall flows are given. The calculations performed by uniterative certainly-incremental mid-flight method with the second order of accuracy by both coordinates. The carried out comparisons of calculation results in different cross-sections along the flow growth with the experimental data demonstrate satisfactory convergence.

*Key words:* boundary layer, turbulent wall flow (jet), velocity profile, mid-flight method, spline.