ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2017. Вип. 25. С. 56–63
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 25. P. 56–63

## М А Т Е М А Т И Ч Н Е   М О Д Е Л Ю В А Н Н Я

*УДК 004.02+519.17*

# ОЦІНКА ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА У ВИПАДКУ ВИПЛАТ РОЗПОДІЛЕНИХ ЗА СУБЕКСПОНЕНЦІЙНИМИ ЗАКОНАМИ

**А. Білинський**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: andrii.bilynskyi@gmail.com*

Розглянуто задачу знаходження асимптотики ймовірності банкрутства у випадку великих виплат розподілених за субекспоненційними законами.

*Ключові слова*: асимптотика ймовірності банкрутства, важкі хвости, субекспоненційні розподіли.

## 1. ВСТУП

Класична нерівність Лундберга, яку можна знайти в усіх базових підручниках з теорії ризику (див. зокрема [1, ст. 187]), дає експоненційні оцінки для ймовірності банкрутства у випадку, коли індивідуальні розміри виплат мають розподіли, хвости яких спадають з експоненційною швидкістю. Ця умова означає, що великі страхові позови і, відповідно, великі страхові виплати відбуваються рідко (з експоненційно малими ймовірностями). Таку схему називають “моделлю з малими виплатами”. У багатьох реальних ситуаціях треба врахувати екстремальні події, тому розміри виплат будуть більш адекватно описуватися випадковими величинами, які мають розподіли з так званими важкими хвостами, до яких, зокрема, належать розподіли типу Парето. У цьому випадку сумарні виплати, по суті, будуть визначатися максимальним індивідуальним позовом. Цей ефект став особливо помітним на початку 2000 р., коли страхові фірми змушені були відшкодовувати значні суми за страховими позовами, зумовленими катастрофами: землетрусами, пожежами, повенями, терактами.

Розглянемо класичну задачу знаходження ймовірності банкрутства ([1] ст. 184-186, [2], [3]). Нехай:

1) $\varphi(u,T) = P\,\{U(t) < 0$ для деякого $0 < t \le T\}$, $0 < t < \infty$, $u > 0$ – імовірність банкрутства на скінченному часовому інтервалі $[0,T]$, $U(t)$ – процес ризику;

2) $\varphi(u) = \varphi(u,\infty) = P\,\{U(t) < 0$ для деякого $t > 0\}$ – імовірність банкрутства на нескінченному інтервалі.

Для обчислення ймовірності банкрутства нам зручно мати прості аналітичні формули для $\varphi(u)$ або $\varphi(u,T)$, які охоплюють імовірнісні характеристики розмірів страхових виплат і процесу надходження вимог на виплати $N(t)$. Передусім нам потрібна функція розподілу $F(x)$.

Надалі приділимо увагу асимптотичній поведінці $\varphi(u)$ у випадку, коли початковий капітал *u* зростає, а функція розподілу $F(x)$ розміру виплат задовольняє певні додаткові умови.

Проте зауважимо, що банкрутства можуть відбутися лише в моменти надходження вимог на виплати $T_n$.

Далі застосовуватимемо такі терміни та позначення: якщо $G(x)$ – функція розподілу, то через $\overline{G}(x) = 1 - G(x)$ позначаємо хвіст розподілу $G$, а через $G^{n^*}$ – $n$-кратну згортку $G$.

Отже, якщо $F$ – функція розподілу розміру виплат, то $\overline{F}(x)$ – хвіст цього розподілу, а

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy, \quad x > 0, \tag{1}$$

називають проінтегрованим хвостом розподілу [1, ст. 186].

Величину $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ називають відносною страховою надбавкою, а для базової умови

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0 \tag{2}$$

вживають термін “умова чистого прибутку”. За умови (2) $\varphi(u)$ може бути записана як ([1], ст. 187).

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}(1 - F_I^{n*}(u)), \; u \ge 0. \tag{3}$$

Додаткові умови на $F$ забезпечують експоненційні оцінки для $\varphi(u)$. Умова Крамера-Лундберга передбачає існування константи $\nu$, яку називають налагоджувальним (регулювальним, коректувальним) коефіцієнтом або коефіцієнтом Лундберга такої, що

$$\int_0^\infty e^{\nu x}(1 - F(x))dx = c/\lambda = (1+\rho)\mu\,. \tag{4}$$

Розподіли, які не задовольняють умову (4), будемо називати розподілами з важкими хвостами [1, ст. 188].

## 2. ІМОВІРНІСТЬ БАНКРУТСТВА ДЛЯ СУБЕКСПОНЕНЦІЙНИХ РОЗПОДІЛІВ

Припустимо, що функція розподілу $F(x), \;\; x \in R_+ = [0,\infty)$ задовольняє умову $F(x) < 1 \;\; \forall x \in R_+$.

**Означення**. Функцію розподілу $F$ назвемо субекспоненційною, якщо для всіх $n \ge 2$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1 - F^{n*}(x)}{1 - F(x)} = n.$$

Клас субекспоненційних функцій розподілу позначатимемо через $S$ [1, ст. 189].

Зауважимо, що субекспоненційні розподіли були запропоновані Чистяковим [4] у контексті теорії гіллястих процесів.

Для подальшої практичної реалізації підрахунку ймовірності банкрутства використаємо таку теорему (див. зокрема [1, ст. 197]).

**Теорема**. Розглянемо модель Крамера – Лундберга за умов $\rho > 0$ та $F_I(\mathrm{x}) \in S$. Тоді

$$\varphi(u) \sim \rho^{-1}\overline{F_I}(u), \quad u \to \infty. \tag{5}$$

Згідно з цією теоремою, у випадку виплат, які мають розподіли з субекспоненційними проінтегрованими хвостами, ймовірність банкрутства допускає просту апроксимацію, що задається формулою (5).

Зауважимо, що умова теореми 1 сформульована в термінах проінтегрованих хвостів, а не самої функції розподілу $F(x)$. Виникає природне запитання: чи випливає з умови $F(x) \in S$, що $F_I(x) \in S$, та навпаки? Загальна відповідь – "Ні". Отже, є визначені розподіли, для яких ми можемо порахувати ймовірність банкрутства.

## 3. ПІДРАХУНОК ІМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА У ВИПАДКУ ВЕЛИКИХ ВИПЛАТ

Розглянемо приклади підрахунку ймовірності банкрутства у випадку важких хвостів, тобто, коли виплати є великими.

Зауважимо, що у випадку, коли виплати розподілені за законом Парето $F(x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $x > k$ та лог-нормальним законом результат отримано в [1, ст. 198-199].

**Твердження 1**. Коли виплати мають розподіл Парето, який задається так:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{k}{k+x}\right)^{\alpha}, \quad \alpha > 1, k > 0, x > 0.$$

Тоді асимптотика ймовірності банкрутства $\varphi(u)$ задається співвідношенням

$$\varphi(u) \sim \frac{\lambda \mathrm{k}^{\alpha}}{c(\alpha-1) - \lambda k}(k+u)^{-\alpha+1}, \quad u \to \infty.$$

*Доведення*. Щільність розподілу задається так:

$$f(x) = \frac{\alpha k}{(k+x)^{\alpha+1}}.$$

У цьому випадку математичне сподівання $\mu = EX_1 = \frac{k}{(\alpha-1)}$. Тоді відносна страхова надбавка

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = \frac{c(\alpha-1)}{\lambda k} - 1; \quad \rho^{-1} = \frac{\lambda k}{c(\alpha-1) - \lambda k}.$$

Якщо $F(x)$ – функція розподілу розміру виплат, то $\overline{F}(x)$ – "хвіст" цього розподілу

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x}\right)^{\alpha}, \quad x > 0.$$

Оскільки проінтегрований хвіст розподілу

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy, \quad x > 0.$$

Тоді

$$\int_0^x \overline{F}(y)dy = \int_0^x \left(\frac{k}{k+y}\right)^\alpha dy = k^\alpha \frac{(k+y)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_0^x = k^\alpha\left(\frac{(k+x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{k^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) =$$

$$\frac{k}{\alpha-1}\left(1 - k^{\alpha-1}(k+x)^{-\alpha+1}\right).$$

$$F_I(x) = 1 - k^{\alpha-1}(k+x)^{-\alpha+1}; \;\; 1 - F_I(x) = k^{\alpha-1}(k+x)^{-\alpha+1}.$$

Отже, асимптотика ймовірності банкрутства задається співвідношенням

$$\varphi(u) \sim \frac{\lambda k^\alpha}{c(\alpha-1) - \lambda k}(k+u)^{-\alpha+1}, \;\; u \to \infty.$$

З аналізу розподілу Парето видно, що це розподіл, у якого правий хвіст прямує до нуля як $x^a$, що приводить до розподілу з хвостом значно важчим, ніж експоненційний. Розглянемо праві хвости цих розподілів:

– експоненційного: $P(X > x) = \exp(-\lambda x)$;
– Парето: $P(X > x) = (\lambda/(\lambda + x)^a)$.

Приймемо

$$P(X > x) = \exp(-cx^\gamma), \gamma > 0.$$

Тепер маємо два випадки. Якщо $\gamma < 1$, то виникає розподіл, який є, у певному розумінні, проміжним між розподілами Парето й експоненційним. Водночас при $\gamma > 1$ правий хвіст легший за експоненційний ($\gamma = 1$ відповідає експоненційному розподілу). Така поведінка хвостів визначає розподіл Вейбулла як дуже гнучкий і такий, що може бути використаний у задачах страхування для моделювання збитків (зазвичай з $\gamma < 1$) [4, ст. 17]. Для розподілу Вейбулла розглянемо таке твердження.

**Твердження 2.** Нехай виплати розподілені за розподілом Вейбулла з параметром $0 < \gamma < 1$, з функцією розподілу

$$F(x) = 1 - \exp\left(-c_1 x^\gamma\right), \;\; c_1 > 0, x > 0 \tag{6}$$

тоді асимптотика ймовірності банкрутства $\varphi(u)$ задається співвідношенням [5]

$$\varphi(u) \sim \frac{\lambda}{c \cdot c_1^{\frac{1}{\gamma}} - \lambda\Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)}\left[1 + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}; c_1 x^\gamma\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}; 0\right)}{\gamma \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}\right], \tag{7}$$

при $u \to \infty$.

*Доведення*. Щільність розподілу Вейбулла

$$f(x) = c_1 \gamma x^{\gamma-1}\exp\left(-c_1 x^\gamma\right).$$

Математичного сподівання

$$\mu = EX_1 = \frac{1}{c^{\frac{1}{\gamma}}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right).$$

Відносна страхова надбавка

$$\rho = \frac{c_1}{\lambda\mu} - 1 = \frac{c_1 \cdot c^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)} - 1 = \frac{c_1 \cdot c^{\frac{1}{\gamma}} - \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}.$$

Тоді

$$\rho^{-1} = \frac{\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{c \cdot c_1^{\frac{1}{\gamma}} - \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}.$$

Проінтегрований хвіст розподілу

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy, \quad x > 0.$$

Зауважимо, що у класичному інтегральному визначенні гамма-функції межі інтегрування фіксовані. Розглядають також неповну гамма-функцію, яка визначається аналогічним інтегралом із змінною верхньою або нижньою межею інтегрування. Розрізняють верхню неповну гамма-функцію, часто позначають як гамма-функцію від двох аргументів

$$\Gamma(a,z) = \int_z^\infty e^{-t} t^{a-1} dt\ .$$

Тоді отримаємо

$$\int_0^x \overline{F}(y)dy = \int_0^x \exp\left(-c_1 y^\gamma\right)dy = \frac{c_1^{-\frac{1}{\gamma}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}; c_1 x^\gamma\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}; 0\right)\right)}{\gamma}.$$

Нагадаємо, що

$$\Gamma(a,z) = \int_z^\infty \exp(-t) t^{a-1} dt.$$

Звідки легко видно, що для розподілу Вейбулла (6) виконується твердження (7).

**Твердження 3**. Нехай виплати мають розподіл Бенктандера типу I

$$1 - F(x) = \left(1 + \frac{2\beta \ln x}{\alpha}\right) x^{-(\alpha+1+\beta\ln x)} \quad \alpha, \beta > 0, x > 1,$$

тоді асимптотика ймовірності банкрутства $\varphi(u)$ задається таким співвідношенням [6]:

$$\varphi(u) \sim \frac{\lambda(\alpha + 1\text{-}\,\mathrm{u}^{-\alpha-\beta\ln x})}{c\alpha - \lambda(\alpha+1)}, \quad u \to \infty.$$

*Доведення*. Функція розподілу та щільність набувають вигляду

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{2\beta \ln x}{\alpha}\right) x^{-(\alpha+1+\beta\ln x)} \quad \alpha, \beta > 0, x > 1,$$

$$f(x) = \left(\left[\left(1 + \frac{2\beta \ln x}{\alpha}\right)(1 + \alpha + 2\beta \ln x)\right] - \frac{2\beta}{\alpha}\right) x^{-(2+\alpha+\beta\ln x)}.$$

Оскільки

$$\mu = EX = \int_1^{+\infty} xf(x)dx = \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

і

$$\rho^{-1} = \frac{\lambda(\alpha+1)}{c\alpha - \lambda(\alpha+1)},$$

то про інтегрований хвіст розподілу набуває вигляду

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy = \frac{x^{-\alpha-\beta\ln x}}{\alpha+1}.$$

Відповідно, асимптотика ймовірності банкрутства задається таким співвідношенням:

$$\varphi(u) \sim \rho^{-1}\overline{F_I}(u) \sim \frac{\lambda(\alpha+1\text{-}u^{-\alpha-\beta\ln x})}{c\alpha - \lambda(\alpha+1)}, \quad u \to \infty.$$

**Твердження 4**. Нехай виплати мають розподіл Бенктандера типу II [1, ст. 196]

$$1 - F(x) = \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)x^{-(1-\beta)}\exp\left\{-\frac{\alpha x^\beta}{\beta}\right\}, \quad \alpha,\beta > 0, x > 1,$$

тоді асимптотика ймовірності банкрутства $\varphi(u)$ задається таким співвідношенням:

$$\varphi(u) \sim \rho^{-1}\overline{F_I}(u) \sim \frac{\lambda}{(\alpha c - \lambda(1+\alpha))}\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{\alpha u^\beta}{\beta}\right), \quad u \to \infty.$$

*Доведення*. Функція розподілу та щільність набувають вигляду

$$F(x) = 1 - \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)x^{-(1-\beta)}\exp\left\{\frac{-\alpha x^\beta}{\beta}\right\}, \quad \alpha,\beta > 0, x > 1;$$

$$f(x) = \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(1-\beta)\cdot x^{\beta-2}\exp\left\{\frac{-\alpha x^\beta}{\beta}\right\} + \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\alpha x^{2\beta-2}\exp\left\{\frac{-\alpha x^\beta}{\beta}\right\}.$$

Математичне сподівання

$$\mu = EX_1 = \frac{1+\alpha}{\alpha}.$$

Тоді відносна страхова надбавка

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = \frac{c\alpha}{\lambda(1+\alpha)} - 1 > 0.$$

Знайдемо

$$\rho^{-1} = \frac{\lambda\mu}{(c-\lambda\mu)} = \frac{\lambda(1+\alpha)}{(\alpha c - \lambda(1+\alpha))}.$$

Отже, якщо $F(x)$ – функція розподілу розміру виплат, то $\overline{F}(x)$ – хвіст цього розподілу

$$\overline{F}(x) = \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)x^{-(1-\beta)}\exp\left\{-\frac{\alpha x^\phi}{\beta}\right\} = \begin{cases} \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)x^{-(1-\beta)}\exp\left\{-\frac{\alpha x^\beta}{\beta}\right\}, & x > 1, \\ 1, & \mathrm{x} \le 1. \end{cases}$$

Знайдемо проінтегрований хвіст розподілу

$$F_I(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy,\quad x>0.$$

Маємо

$$\int_0^x \overline{F}(y)dy=\int_0^1 dy+\int_1^x \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)y^{-(1-\beta)}\exp\left\{-\frac{\alpha y^{\beta}}{\beta}\right\}dy=$$

$$=1+\frac{1}{\alpha}-\frac{\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\alpha}\exp\left\{-\frac{\alpha x^{\beta}}{\beta}\right\},\quad x>1.$$

Отже, ми отримали

$$F_I(x)=1-\frac{\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{(1+\alpha)}\exp\left\{-\frac{\alpha x^{\beta}}{\beta}\right\}.$$

$$\overline{F_I}(x)=1-F_I(x)=\frac{\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{(1+\alpha)}\exp\left\{\frac{-\alpha x^{\beta}}{\beta}\right\}.$$

Відповідно, асимптотика ймовірності банкрутства задається таким співвідношенням:

$$\varphi(u)\sim\rho^{-1}\overline{F_I}(u)\sim\frac{\lambda}{(\alpha c-\lambda(1+\alpha))}\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{\alpha u^{\beta}}{\beta}\right),\quad u\to\infty.$$

## 4. ВИСНОВКИ

Розглянута задача знаходження ймовірності банкрутства у випадку важких хвостів. Знайдено асимптотику ймовірності банкрутства у випадку, коли виплати мають розподіли Парето, Вейбулла та Бенктандера типу I та II.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Зінченко Н. М.* Математичні методи в теорії ризику: навчальний посібник / Н. М. Зінченко. – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 224 с.
2. *Леоненко М. М.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці / М. М. Леоненко, Ю. С. Мішура, В. М. Пархоменко, М. Й. Ядренко. – Київ: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
3. *Мак Т.* Математика рискового страхования / Т. Мак. – Москва: ЗАО "Олимп-Бизнес", 2005. – 432 с.
4. *Chistyakov V. P.* A theorem on sums of irv and its applications to branching processes / V. P. Chistyakov // Teor. Probability Appl. – 1969. – № 9. – P. 640-648.
5. *Білинський А. Я.* Про оцінку ймовірність банкрутства у випадку великих виплат / А. Я. Білинський, О. М. Кінаш // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: К-ПНУ ім. Івана Огієнка, – 2016. Збірник № 14. – С. 5-10.
6. *Bilynskyi A.* One case of asymptotic behavior of the probability of bankruptcy of insurance company / A. Bilynskyi, O. Kinash // SWorld Journal, Iss. 11, Vol. 14. –

Physics and Mathematics (Scientific world, Ivanovo, 2016) – URL: http://www.sworld.education/e-journal/j1114.pdf (November 2016) – P. 8-11. – j1114-002.

*Стаття: надійшла до редколегії 25.01.2017*
*доопрацьована 17.05.2017*
*прийнята до друку 14.06.2017*

## ASSESSMENT OF THE PROBABILITY OF BANKRUPTCY IN THE EVENT OF PAYMENT DISTRIBUTED BY SUBEXPONENTIAL LAWS

**A. Bilynskyi**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: andrii.bilynskyi@gmail.com*

Considered the problem of the asymptotic probability of bankruptcy for large payments distributed by subexponential laws.

*Key words*: asymptotics of the probability of bankruptcy, “heavy tails”, subexponential distributions.