ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2017. Вип. 25. С. 49–55
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 25. P. 49–55

УДК 519.6

ПРО ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ НЬЮТОНА-ПОТРА ЗА СЛАБКИХ УМОВ

С. Шахно, Г. Ярмола

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: s_shakhno@lnu.edu.ua*

Розглянуто нелінійне рівняння з недиференційовним оператором. Досліджено напівлокальну збіжність методу Ньютона-Потра за слабких умов для похідних і поділених різниць першого порядку. Виведено рівняння для обчислення радіуса області збіжності методу та єдиності розв'язку нелінійного рівняння. Отримано оцінку швидкості збіжності комбінованого методу.

Ключові слова: нелінійне рівняння, метод Ньютона-Потра, напівлокальна збіжність.

1. ВСТУП

Розглянемо задачу обчислення розв'язку рівняння

$$H(x) \equiv F(x) + G(x) = 0, \tag{1}$$

де F і G – нелінійні оператори, визначені на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y, причому F – диференційовний за Фреше оператор; G – неперервний оператор. У разі недиференційовності оператора H застосувати класичний метод Ньютона для розв'язування рівняння (1) не можна.

У праці [11] запропоновано та досліджено метод типу Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} H(x_n), \quad n \ge 0.$$

Проте чисельні експерименти виявили повільну збіжність цього ітераційного процесу. Також для розв'язування сформульованої задачі можна застосувати різницеві методи, які в обчислювальній формулі не потребують аналітично заданих похідних. Найпоширенішим є метод хорд (січних) [8]

$$x_{n+1} = x_n - [H(x_n; x_{n-1})]^{-1} H(x_n), \quad n \ge 0.$$

Тут $H(x_n; x_{n-1})$ – поділена різниця першого порядку оператора H. Інший підхід до розв'язування рівняння (1) полягає у застосуванні комбінованих методів, побудованих на підставі різних методів для рівняння $F(x) = 0$. Їхні дослідження проведено у багатьох працях [2 – 5, 7, 10].

На підставі методів Ньютона та Потра [1, 9] ми побудували комбінований ітераційний процес

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - A_n^{-1} H(x_n), \quad n \ge 0, \\ A_n &= F'(x_n) + G(x_n; x_{n-1}) + G(x_{n-2}; x_n) - G(x_{n-2}; x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

У праці [4] вивчено локальну та напівлокальну збіжність методу (2) за класичних умов Ліпшиця. З'ясовано, що порядок збіжності комбінованого ітераційного процесу збігається з порядком збіжності базового методу Потра.

У цій праці дослідження напівлокальної збіжності запропонованого методу проведено за слабких умов типу ω та ε для перших похідних оператора F і поділених різниць першого порядку оператора G. За ω-умов досліджували збіжність методу типу Ньютона, методу хорд і деяких комбінованих методів у [6, 10]. Зауважимо, що розглянуті ω-умови узагальнюють класичні умови Ліпшиця та Гьольдера і не потребують диференційовності оператора G. У [7] за ε-умов проведено аналіз збіжності комбінованого методу Ньютона-хорд

$$x_{n+1} = x_n - A_n^{-1} H(x_n), \quad n \ge 0,$$
$$A_n = F'(x_n) + G(z_n; z_{n-1}),$$

де $\{z_n\}_{n\ge -1}$ – послідовність, яка міститься в множині D.

2. НАПІВЛОКАЛЬНА ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ (2)

Позначимо $B(\bar{x}, R) = \{x \in X : \|x - \bar{x}\| < R\}$, $\overline{B(\bar{x}, R)} = \{x \in X : \|x - \bar{x}\| \le R\}$.

Теорема 1. Нехай F і G – нелінійні оператори, які визначені на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Нехай $G(\cdot;\cdot)$ – поділені різниці першого порядку оператора G, визначені на множині D. Припустимо, що лінійний оператор $A_0 = F'(x_0) + G(x_0; x_{-1}) + {}$ $+ G(x_{-2}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1})$, де $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in D$, є оборотний і для всіх $x, y, u, v \in D$ виконуються умови

$$\left\| A_0^{-1}(F'(x) - F'(y)) \right\| \le \omega_1\left(\|x - y\|\right), \tag{3}$$

$$\left\| A_0^{-1}(G(x;y) - G(u;v)) \right\| \le \omega_2\left(\|x - u\|, \|y - v\|\right). \tag{4}$$

Тут ω_1 – неспадна додатна функція на відрізку $[0, R]$, яка задовольняє умову $\omega_1(tr) \le h(t)\omega_1(r)$, $h:[0,1] \to R$, $t \in [0,1]$, $r \in [0, R]$; $\omega_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – неперервна неспадна функція двох аргументів.

Нехай існують константи $\eta > 0$, $\alpha \ge 0$ і $\beta \ge 0$ такі, що

$$\left\| A_0^{-1}(F(x_0) + G(x_0)) \right\| \le \eta, \tag{5}$$
$$\|x_0 - x_{-1}\| \le \alpha, \ \|x_{-1} - x_{-2}\| \le \beta.$$

Позначимо через $m = \Phi\omega_1(\eta) + \max\{\omega_2(\eta,\eta) + \omega_2(0,\eta), \omega_2(\eta,\alpha) + \omega_2(0,\alpha)\}$,

$\Phi = \int_0^1 h(t)dt$, $\quad \psi(\alpha,\beta,u) = \omega_1(u) + \omega_2(u, u+\alpha) + \omega_2(u+\alpha+\beta, u) + \omega_2(u+\alpha+\beta, u+\alpha)$.

Припустимо, що рівняння

$$u\left(1 - \frac{m}{1 - \psi(\alpha,\beta,u)}\right) - \eta = 0$$

має принаймні один додатний корінь і R – найменший додатний.

Якщо $\psi(\alpha,\beta,R) < 1$, $M = \dfrac{m}{1 - \psi(\alpha,\beta,R)} < 1$ і $\overline{B(x_0, R)} \subset D$, то послідовність $\{x_n\}_{n\ge 0}$, генерована ітераційним процесом (2), коректно визначена, міститься в $B(x_0, R)$ і збігається до єдиного розв'язку $x^* \in \overline{B(x_0, R)}$ рівняння (1).

Доведення. Доведення теореми проведемо методом математичної індукції. Враховуючи (2) і (5), для $n = 0$ отримаємо

$$\|x_1 - x_0\| \le \|A_0^{-1}(F(x_0) + G(x_0))\| \le \eta < R.$$

Отже, $x_1 \in B(x_0, R)$.

Використовуючи умови (3) і (4), одержимо

$$\|I - A_0^{-1}A_1\| = \|A_0^{-1}(A_0 - A_1)\| \le \|A_0^{-1}(F'(x_0) - F'(x_1))\| +$$

$$+\|A_0^{-1}(G(x_0; x_{-1}) + G(x_{-2}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1}) - G(x_1; x_0) - G(x_{-1}; x_1) + G(x_{-1}; x_0))\| \le$$

$$\le \omega_1\left(\|x_1 - x_0\|\right) + \omega_2\left(\|x_1 - x_0\|, \|x_{-1} - x_0\|\right) +$$

$$+\omega_2\left(\|x_{-2} - x_{-1}\|, \|x_0 - x_1\|\right) + \omega_2\left(\|x_{-1} - x_{-2}\|, \|x_0 - x_{-1}\|\right) \le \omega_1(\eta) +$$

$$+\omega_2(\eta, \alpha) + \omega_2(\beta, \eta) + \omega_2(\beta, \alpha) \le \omega_1(R) + \omega_2(R, \alpha) + \omega_2(\beta, R) + \omega_2(\beta, \alpha) \le$$

$$\le \omega_1(R) + \omega_2(R, R + \alpha) + \omega_2(R + \alpha + \beta, R) + \omega_2(R + \alpha + \beta, R + \alpha) = \psi(\alpha, \beta, R) < 1.$$

За теоремою Банаха про обернений оператор матимемо, що $A_1^{-1}A_0$ існує і

$$\| A_1^{-1}A_0 \| < \frac{1}{1 - \psi(\alpha, \beta, R)}.$$

Далі можемо записати

$$A_0^{-1}(F(x_1) + G(x_1)) =$$

$$= A_0^{-1}(F(x_1) - F(x_0) - F'(x_0)(x_1 - x_0)) +$$

$$+A_0^{-1}(G(x_1) - G(x_0) - (G(x_0; x_{-1}) + G(x_{-2}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1}))(x_1 - x_0)) =$$

$$= \int_0^1 A_0^{-1}(F'(x_0 + t(x_1 - x_0)) - F'(x_0))dt(x_1 - x_0) +$$

$$+A_0^{-1}(G(x_1; x_0) - G(x_0; x_{-1}) - G(x_{-2}; x_0) + G(x_{-2}; x_{-1}))(x_1 - x_0).$$

Звідси, врахувавши умови (3) і (4), матимемо

$$\|x_2 - x_1\| = \|A_1^{-1}(F(x_1) + G(x_1))\| \le \|A_1^{-1}A_0\| \|A_0^{-1}(F(x_1) + G(x_1))\| \le$$

$$\le \frac{\Phi\omega_1\left(\|x_0 - x_1\|\right) + \omega_2\left(\|x_1 - x_0\|, \|x_0 - x_{-1}\|\right) + \omega_2\left(\|x_{-2} - x_{-2}\|, \|x_{-1} - x_0\|\right)}{1 - \psi(\alpha, \beta, R)} \|x_1 - x_0\| \le$$

$$\le \frac{\Phi\omega_1(\eta) + \omega_2(\eta, \alpha) + \omega_2(0, \alpha)}{1 - \psi(\alpha, \beta, R)} \|x_1 - x_0\| = M\|x_1 - x_0\| < \eta.$$

З іншого боку,

$$\|x_2 - x_0\| \le \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \le$$

$$\le (M + 1)\|x_1 - x_0\| \le (M + 1)\eta = \frac{1 - M^2}{1 - M}\eta < \frac{1}{1 - M}\eta = R$$

і $x_2 \in B(x_0, R)$.

Припустимо, що для $k = \overline{1, n-1}$ виконується

- $A_k^{-1}A_0$ існує і $\| A_k^{-1}A_0 \| < \dfrac{1}{1 - \psi(\alpha, \beta, R)}$;
- $\|x_{k+1} - x_k\| \le M\|x_k - x_{k-1}\| \le M^k\|x_1 - x_0\| \le \eta$;
- $x_{k+1} \in B(x_0, R)$.

Тоді, враховуючи умови (3) і (4), для $k = n$ одержимо

$$\left\|I - A_0^{-1}A_n\right\| = \left\|A_0^{-1}(A_0 - A_n)\right\| \le \left\|A_0^{-1}(F'(x_0) - F'(x_n))\right\| +$$
$$+\left\|A_0^{-1}(G(x_0;x_{-1}) + G(x_{-2};x_0) - G(x_{-2};x_{-1}) - G(x_n;x_{n-1}) - G(x_{n-2};x_n) + G(x_{n-2};x_{n-1}))\right\| \le$$
$$\le \omega_1\left(\|x_0 - x_n\|\right) + \omega_2\left(\|x_0 - x_n\|, \|x_{-1} - x_{n-1}\|\right) +$$
$$+\omega_2\left(\|x_{-2} - x_{n-2}\|, \|x_0 - x_n\|\right) + \omega_2\left(\|x_{n-2} - x_{-2}\|, \|x_{n-1} - x_{-1}\|\right) \le$$
$$\le \omega_1(\eta) + \omega_2(\eta, \alpha+\eta) + \omega_2(\alpha+\beta+\eta, \eta) + \omega_2(\alpha+\beta+\eta, \eta+\alpha) \le$$
$$\le \omega_1(R) + \omega_2(R, R+\alpha) + \omega_2(R+\alpha+\beta, R) + \omega_2(R+\alpha+\beta, R+\alpha) = \psi(\alpha,\beta,R) < 1.$$

За теоремою Банаха $A_n^{-1}A_0$ існує і

$$\| A_n^{-1}A_0 \| < \frac{1}{1-\psi(\alpha,\beta,R)}.$$

Врахувавши, що

$$A_0^{-1}(F(x_n) + G(x_n)) =$$
$$= A_0^{-1}(F(x_n) - F(x_{n-1}) - F'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})) +$$
$$+A_0^{-1}(G(x_n) - G(x_{n-1}) - (G(x_{n-1};x_{n-2}) - G(x_{n-3};x_{n-1}) + G(x_{n-3};x_{n-2}))(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= \int_0^1 A_0^{-1}(F'(x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1})) - F'(x_{n-1}))dt(x_n - x_{n-1}) +$$
$$+A_0^{-1}(G(x_n;x_{n-1}) - G(x_{n-1};x_{n-2}) - G(x_{n-3};x_{n-1}) + G(x_{n-3};x_{n-2}))(x_n - x_{n-1})$$

й умови (3) і (4), матимемо

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \left\|A_n^{-1}(F(x_n) + G(x_n))\right\| \le$$
$$\le \left\|A_n^{-1}A_0\right\| \left\|A_0^{-1}(F(x_n) + G(x_n))\right\| \le$$
$$\le \frac{\Phi\omega_1\left(\|x_n - x_{n-1}\|\right)}{1-\psi(\alpha,\beta,R)}\|x_n - x_{n-1}\| +$$
$$+\frac{\omega_2\left(\|x_n - x_{n-1}\|, \|x_{n-1} - x_{n-2}\|\right) + \omega_2\left(\|x_{n-3} - x_{n-3}\|, \|x_{n-2} - x_{n-1}\|\right)}{1-\psi(\alpha,\beta,R)}\|x_n - x_{n-1}\| \le$$
$$\le \frac{\Phi\omega_1(\eta) + \omega_2(\eta,\eta) + \omega_2(0,\eta)}{1-\psi(\alpha,\beta,R)}\|x_n - x_{n-1}\| = M\|x_n - x_{n-1}\| \le M^{n-1}\|x_1 - x_0\| < \eta.$$

Доведемо, що $x_{n+1} \in B(x_0, R)$. Справді,

$$\|x_{n+1} - x_0\| \le \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \ldots + \|x_1 - x_0\| \le$$
$$\le (M^n + M^{n-1} + \ldots + M + 1)\|x_1 - x_0\| = \frac{1-M^{n+1}}{1-M}\eta < \frac{1}{1-M}\eta = R$$

і $x_{n+1} \in B(x_0, R)$.

З'ясуємо, що $\{x_n\}_{n\ge 0}$ – послідовність Коші. Справді,

$$\|x_{n+p} - x_n\| \le \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \le$$
$$\le (M^{p-1} + M^{p-2} + \ldots + 1)\|x_{n+1} - x_n\| = \frac{1-M^p}{1-M}M^n\eta < \frac{M^n}{1-M}\eta.$$

Отже, $\{x_n\}_{n\ge 0}$ є фундаментальною послідовністю і збігається до $x^* \in \overline{B(x_0, R)}$.

Доведемо, що x^* є розв'язком рівняння (1) і він єдиний. Оскільки

$$\left\|A_0^{-1}H(x_n)\right\| \le (\Phi\omega_1(\eta)+\omega_2(\eta,\eta)+\omega_2(0,\eta))\left\|x_n - x_{n-1}\right\|$$

і $\| x_n - x_{n-1} \| \to 0$ при $n \to \infty$, то $H(x^*) = 0$.

Доведення єдиності проведемо від супротивного. Припустимо, що існує $x^{**} \in \overline{B(x_0, R)}$, $x^{**} \ne x^*$ і $H\left(x^{**}\right) = 0$. Позначимо

$$A \equiv \int_0^1 F'(x^* + t(x^{**} - x^*))dt + G(x^{**}; x^*).$$

Тоді правильна рівність $A(x^{**} - x^*) = H(x^{**}) - H(x^*)$. Якщо оператор A^{-1} оборотний, то $x^{**} = x^*$. Справді,

$$\left\|I - A_0^{-1}A\right\| = \left\|A_0^{-1}(A_0 - A)\right\| \le \left\|A_0^{-1}\int_0^1 (F'(x_0) - F'(x^* + t(x^{**} - x^*)))dt\right\| +$$

$$+\left\|A_0^{-1}[G(x^{**}; x^*) - G(x_0; x_{-1}) - G(x_{-2}; x_0) + G(x_{-2}; x_{-1})]\right\| \le$$

$$\le \int_0^1 \omega\left((1-t)\left\|x_0 - x^*\right\| + t\left\|x_0 - x^{**}\right\|\right)dt + \omega_2\left(\left\|x^{**} - x_0\right\| \|, \left\|x^* - x_{-1}\right\|\right) +$$

$$+\omega_2\left(\left\|x_{-2} - x_{-2}\right\|, \left\|x_{-1} - x_0\right\|\right) \le \omega(R) + \omega_2(R, R+\alpha) + \omega_2(0,\alpha) < 1.$$

Отже, A^{-1} існує. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай F і G – нелінійні оператори, які визначені на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Нехай $G(\cdot;\cdot)$ – поділені різниці першого порядку оператора G, визначені на множині D. Припустимо, що лінійний оператор $A_0 = F'(x_0) + G(x_0; x_{-1}) + {}$ $+G(x_{-2}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1})$, де $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in D$, є оборотний і в кулі D виконуються умови

$$\left\|A_0^{-1}(F'(x) - F'(y))\right\| \le \varepsilon_1,$$

$$\left\|A_0^{-1}(G(x;y) - G(u;v))\right\| \le \varepsilon_2.$$

Нехай

$$\left\|A_0^{-1}(F(x_0) + G(x_0))\right\| \le \eta,$$

$$0 < \gamma = \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{1 - (\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)} < 1, \quad \frac{\eta}{1-\gamma} < R$$

і $\overline{B(x_0, R)} \subset D$.

Тоді ітераційний процес (2) коректно визначений, генерована ним послідовність $\{x_n\}_{n\ge 0}$ міститься в $B(x_0, R)$ і збігається до єдиного розв'язку $x^* \in \overline{B(x_0, R)}$ рівняння (1). Крім того, для всіх $n \ge 0$ правильна оцінка

$$\left\|x_n - x^*\right\| \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\eta. \qquad (6)$$

Доведення. Доведення збіжності методу (2) до єдиного розв'язку x^* рівняння (1) проводиться методом математичної індукції аналогічно, як в теоремі 1. Доведемо, що виконується оцінка (6). Оскільки для $n, p \in N$ виконується

$$\|x_{n+p} - x_n\| \le \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \le$$

$$\le (\gamma^{p-1} + \gamma^{p-2} + \ldots + 1)\|x_{n+1} - x_n\| = \frac{1-\gamma^p}{1-\gamma}\gamma^n\eta < \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\eta,$$

то при $p \to \infty$ отримаємо (6). Теорему доведено.

3. ВИСНОВКИ

Розглянуто комбінований метод Ньютона-Потра для розв'язування нелінійних операторних рівнянь. Дослідження збіжності проведено за слабких умов типу ω і ε. Доведено збіжність розглянутого ітераційного процесу до єдиного розв'язку. Отримано рівняння для обчислення радіуса області збіжності методу та єдиності розв'язку нелінійного рівняння. Також отримано оцінку швидкості збіжності методу.

Метод Ньютона-Потра був апробований на тестових задачах з недиференційовним оператором [4]. Отримані результати демонструють перевагу комбінованого методу перед базовими методами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ортега Дж.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – Москва: – Мир, 1975. – 558 с.
2. *Шахно С. М.* Аналіз збіжності комбінованого методу для розв'язування нелінійних рівнянь / С. М. Шахно, І. В. Мельник, Г. П. Ярмола // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 1. – С. 11–22.
   Те саме: Shakhno S. M. Convergence analysis of combined method for solving nonlinear equations / S. M. Shakhno, I. V. Mel'nyk, H. P. Yarmola // J. Math. Sci. – 2016. – 212, № 1. – P. 16–26.
3. *Шахно С. М.* Двоточковий метод для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором / С. М. Шахно, Г. П. Ярмола // Математичні студії. – 2011. – Т. 36, № 2. – С. 213–220.
4. *Шахно С. М.* Комбінований метод Ньютона-Потра для розв'язування нелінійних операторних рівнянь / С. М. Шахно, А.-В. І. Баб'як, Г. П. Ярмола // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – № 3 (120). – С. 170–178.
5. *Argyros I. K.* A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space / I. K. Argyros // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – Vol. 298. – P. 374–397.
6. *Argyros I. K.* Newton-Kantorovich approximations under weak continuity conditions / I. K. Argyros, S. Hilout // J. Appl. Math. Comput. – 2011. – Vol. 37. – P. 361–375.
7. *Argyros I. K.* On the convergence of a Newton-like method under weak conditions / I. K. Argyros, H. Ren // Commun. Korean Math. Soc. – 2011. – № 4 (26). – P. 575–584.
8. *Hernandez M. A.* The Secant method for nondifferentiable operators / M. A. Hernandez, M. J. Rubio // Appl. Math. Lett. – 2002. – Vol. 15. – P. 395–399.

9. *Potra F. A.* On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations / F. A. Potra // Numer. Funct. Anal. Optim. – 1984–1985. – Vol. 7, № 1. – P. 75–106.
10. *Ren H.* A new semilocal convergence theorem for a fast iterative method with nondifferentiable operators / H. Ren, I. K. Argyros // J. Appl. Math. Comp. – 2010. – Vol. 34, № 1-2. – P. 39–46.
11. *Zabrejko P. P.* The majorant method in the theory of Newton-Kantorovich approximations and the Pták error estimates / P. P. Zabrejko, D. F. Nguen // Numer. Funct. Anal. Optim. – 1987. – Vol. 9. – P. 671–686.

Стаття: надійшла до редколегії 14.12.2016
доопрацьована 17.05.2017
прийнята до друку 14.06.2017

ON CONVERGENCE OF NEWTON-POTRA METHOD UNDER WEAK CONDITIONS

S. Shakhno, H. Yarmola

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: s_shakhno@lnu.edu.ua

A nonlinear equation with nondifferentiable operator is considered. Semilocal convergence of the Newton-Potra method under the weak conditions for derivatives and divided differences of the first order is studied. An equation for calculation the radius of convergence ball of method and uniqueness ball of the solution of nonlinear equations are derived. The estimation of convergence rate of combined method is obtained.

Key words: nonlinear equation, Newton-Potra method, semilocal convergence.