

ДВОСТОРОННІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ НА ПІДСТАВІ МАТЕМАТИКИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ

П. Сеньо

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: petrosny@ukr.net

Розроблено методику побудови та дослідження двосторонніх методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, заснованих на математиці функціональних інтервалів [5]. Побудовано множину методів такого типу, наведено алгоритми отримання гарантованих апроксимацій невідомого розв'язку задачі у вигляді сплайнів. Запропоновані методи дають змогу будувати такі апроксимації будь-якої наперед заданої ширини.

Ключові слова: функціональний інтервал, інтервальне розширення функції, диференціальне рівняння, задача Коші, наближення функції, двостороння апроксимація, сплайн.

1. ВСТУП

Навіть для найпростіших диференціальних рівнянь розв'язати задачу Коші

$$y' = f(x, y(x)), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (2)$$

на інтервалі $[a, b]$, де $a = x_0$, за допомогою скінченної кількості математичних операцій взагалі неможливо. Тому побудована велика кількість аналітичних і чисельних методів наближеного розв'язування цієї задачі. Однак всі вони мають багато суттєвих недоліків. Зокрема, у разі існування і єдиності розв'язку задачі (1) – (2) ці методи дають наближення до розв'язку задачі з бажаною точністю лише в деякому околі початкового наближення (2); послідовні наближення часто отримують за допомогою квадратур, а вони в багатьох випадках не виражаються через елементарні функції, що потребує застосування наближених методів інтегрування; похибки методів мають тенденцію до накопичення; для досягнення бажаної точності потрібно вибирати досить малий крок методу, що породжує великий обсяг обчислень тощо. Такі недоліки приводять до того, що отримані цими методами результати часто дуже далекі від шуканого розв'язку задачі (1) – (2) [2].

Найточніший аналітичний метод наближеного розв'язання задачі (1) – (2) – метод С. А. Чаплигіна [8]. Однак він потребує наближеного осереднення проміжних значень і наближеного обчислення відповідних інтегралів.

Тому всі ці методи зазвичай не дають строгих, гарантованих оцінок близькості конкретних наближень і точних розв'язків. Такі властивості мають чисельні методи інтервальної математики [1, 4, 9], і деякі двосторонні обчислювальні методи [3], які породжують прямі методи оцінки точності похибки методів і похибки обчислень.

Методи, побудовані на підставі математики функціональних інтервалів [7], не містять значної частини перерахованих вище недоліків. Крім того, їм притаманні всі переваги методів інтервальної математики та двосторонніх методів.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Ефективність кожного двостороннього методу розв'язування сформульованої задачі, швидкість збіжності суттєво залежить від виду і точності апроксимацій функцій та (або) їхніх похідних, які визначають відповідну математичну модель. Тому дуже важливо розробити таку методичку побудови двосторонніх апроксимацій функцій і, зокрема, оцінювання інтервальних розширень відповідних функцій, які максимально близькі не лише до їхніх об'єднаних розширень на всьому інтервалі X зміни аргументу, а й на його підінтервалах.

З погляду комп'ютерних наук, кожна функція $f(x)$ це відображення, що є реалізацією скінченної кількості арифметичних операцій над деякими елементарними, типовими, спеціальними функціями $\varphi_i(x)$, ($i = 1, \dots, n$), константами, і скінчена кількість суперпозицій таких відображень. Оскільки властивості функцій $\varphi_i(x)$ відомі, то для кожної з цих функцій на інтервалі X можна побудувати функціональний інтервал $\Phi_i(X)$ [5]. Виконавши відповідні арифметичні операції над функціональними інтервалами $\Phi_i(X)$ всіх функцій $\varphi_i(x)$, ($i = 1, \dots, n$), що входять у аналітичний вираз функції $f(x)$, і необхідні суперпозиції, отримаємо функціональний інтервал $F(X)$ функції $f(x)$.

З означення функціонального інтервалу випливає, що графік функції $f(x)$ міститься у функціональному інтервалі $F(X)$ і всі властивості цієї функції природно трансформуються у властивості її функціонального інтервалу. Тому, використовуючи відповідно функціональний інтервал $F(X)$ правої частини $f(x, y(x))$ рівняння (1) задачі Коші (1)–(2), його властивості, потрібно побудувати ефективні методи розв'язування цієї задачі Коші, внаслідок реалізації яких будемо отримувати функціональні інтервали, що гарантовано містять розв'язок задачі. У цьому випадку треба врахувати те, що функціональний інтервал $F(X)$ залежить від функціонального інтервалу функції $y(x)$ невідомого розв'язку задачі (1)–(2).

Оскільки інтервальне розширення функції є частинним і дуже грубим її функціональним інтервалом, то так побудовані методи розв'язування задачі Коші будуть значно ефективніші від відповідних інтервальних методів розв'язування цієї задачі [3]. Такі методи будуть двосторонніми та гарантуватимуть строгі, гарантовані межі розв'язків. Вони дадуть змогу отримувати будь-яку бажану максимальну ширину двосторонніх обмежень розв'язку задачі (1)–(2).

3. ЗАГАЛЬНА СХЕМА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Загальна методика побудови методів розв'язування задачі Коші (1)–(2) ґрунтується на висновках теорем 1, 2 з [7] і теорем 3, 4, 5. В них висновки про двосторонні оцінювання значень функції отримані на підставі двох різних методик використання двосторонніх оцінювань значень похідної цієї функції.

Теорема 1. Нехай функція $y(x)$ один раз неперервно диференційовна у кожній точці x інтервалу $[a, b]$ і функції $\underline{g}(x)$, $\overline{g}(x)$ такі, що на цьому інтервалі виконується подвійна нерівність

$$\underline{g}(x) \leq y'(x) \leq \overline{g}(x). \quad (3)$$

Тоді виконуються такі нерівності:

$$y_a + \int_a^x \underline{g}(t) dt \leq y(x) \leq y_a + \int_a^x \bar{g}(t) dt, \quad (4)$$

$$y_b - \int_x^b \bar{g}(t) dt \leq y(x) \leq y_b - \int_x^b \underline{g}(t) dt, \quad (5)$$

де

$$y_a = y(a), \quad y_b = y(b). \quad (6)$$

Нехай визначені функції

$$\underline{g}(x) = \underline{k}x + \underline{m}, \quad (7)$$

$$\bar{g}(x) = \bar{k}x + \bar{m}, \quad (8)$$

$$\underline{p}_a(x) = 0.5 \underline{k}x^2 + \underline{m}x - 0.5 \underline{k}a^2 - \underline{m}a + y_a, \quad (9)$$

$$\bar{p}_a(x) = 0.5 \bar{k}x^2 + \bar{m}x - 0.5 \bar{k}a^2 - \bar{m}a + y_a, \quad (10)$$

$$\underline{p}_b(x) = 0.5 \bar{k}x^2 + \bar{m}x - 0.5 \bar{k}b^2 - \bar{m}b + y_b, \quad (11)$$

$$\bar{p}_b(x) = 0.5 \underline{k}x^2 + \underline{m}x - 0.5 \underline{k}b^2 - \underline{m}b + y_b, \quad (12)$$

$$\omega_a(x) = \bar{p}_a(x) - \underline{p}_a(x), \quad (13)$$

$$\omega_b(x) = \bar{p}_b(x) - \underline{p}_b(x), \quad (14)$$

де

$$y_a = y(a), \quad y_b = y(b), \quad (15)$$

$\underline{k}, \underline{m}, \bar{k}, \bar{m}$ – деякі константи. Тоді виконується така теорема.

Теорема 2. Нехай в інтервалі $X = [a, b]$ функція $y(x)$ неперервно диференційовна і її похідна $y'(x)$ задовольняє подвійну нерівність

$$\underline{g}(x) \leq y'(x) \leq \bar{g}(x). \quad (16)$$

Тоді

$$\underline{p}_a(x) \leq y(x) \leq \bar{p}_a(x), \quad (17)$$

$$\underline{p}_b(x) \leq y(x) \leq \bar{p}_b(x); \quad (18)$$

функція $\omega_a(x)$ монотонно зростаюча, а функція $\omega_b(x)$ монотонно спадна, їхні прирости збігаються з точністю до знака; для будь-якого $x \in X = [a, b]$

$$\omega_a(x) + \omega_b(x) = C > 0, \quad (19)$$

де константа

$$C = 0.5(\bar{k} - \underline{k})(b^2 - a^2) + (\bar{m} - \underline{m})(b - a); \quad (20)$$

якщо $\underline{k} \neq \bar{k}$, то в інтервалі $[a, b]$ рівняння

$$\bar{p}_a(x) = \bar{p}_b(x), \quad (21)$$

$$\underline{p}_a(x) = \underline{p}_b(x) \quad (22)$$

мають розв'язки \bar{x}^* , \underline{x}^* , відповідно, і вони єдині; максимальна відстань $diam_y$ в інтервалі $[a, b]$ вздовж осі OY між точками множини точок, обмежених параболою

$\bar{p}_a(x), \bar{p}_b(x), \underline{p}_a(x), \underline{p}_b(x)$ (параболічного паралелограма (див. [7], рис. 1), задовольняє співвідношення

$$diam_y = \min(Y1, Y2) \leq 0.5 C, \quad (23)$$

де константи

$$Y_2 = 0.5 \bar{k} (b^2 - a^2) + \bar{m} (b - a) + y_a - y_b, \quad (24)$$

$$Y_1 = y_b - y_a - 0.5 \underline{k} (b^2 - a^2) - \underline{m} (b - a). \quad (25)$$

Теорема 3. Нехай на проміжку $[a, b]$ функція $y(x)$ двічі неперервно диференційовна і її друга похідна $y''(x)$ обмежена –

$$\underline{k} \leq y''(x) \leq \bar{k}, \quad (26)$$

де \underline{k}, \bar{k} – деякі константи; відоме її значення $y_a = y(a)$ і значення її похідної $y'_a = y'(a), y'_b = y'(b)$ на кінцях інтервалу $[a, b]$.

Тоді

$$y'_a + \underline{k} \cdot (b - a) \leq y'_b \leq y'_a + \bar{k} \cdot (b - a), \quad (27)$$

$$\underline{l}(x) \leq y'(x) \leq \bar{l}(x). \quad (28)$$

Тут

$$\underline{l}(x) = \begin{cases} \underline{k} \cdot x + (y'_a - \underline{k} \cdot a), & a \leq x < x_2 \\ \bar{k} \cdot x + (y'_b - \bar{k} \cdot b), & x_2 < x \leq b \end{cases}, \quad (29)$$

$$\bar{l}(x) = \begin{cases} \bar{k} \cdot x + (y'_a - \bar{k} \cdot a), & a \leq x < x_1 \\ \underline{k} \cdot x + (y'_b - \underline{k} \cdot b), & x_1 < x \leq b \end{cases}, \quad (30)$$

$$x_1 = ((y'_b - y'_a) - \underline{k} \cdot b + \bar{k} \cdot a) / (\bar{k} - \underline{k}), \quad (31)$$

$$x_2 = -((y'_b - y'_a) - \bar{k} \cdot b + \underline{k} \cdot a) / (\bar{k} - \underline{k}), \quad (32)$$

$$x_1 + x_2 = a + b. \quad (33)$$

Доведення. Нехай $\underline{g}(x) \stackrel{def}{=} \underline{k}, \bar{g}(x) \stackrel{def}{=} \bar{k}$. Тоді, оскільки $y''(x) = (y'(x))'$, згідно з теоремою 1, у всіх точках x інтервалу $[a, b]$

$$y'_a + \int_a^x \underline{g}(t) dt \leq y'(x) \leq y'_a + \int_a^x \bar{g}(t) dt, \quad (34)$$

$$y'_b - \int_x^b \bar{g}(t) dt \leq y'(x) \leq y'_b - \int_x^b \underline{g}(t) dt, \quad (35)$$

тобто

$$y'_a + \underline{k} \cdot (x - a) \leq y'(x) \leq y'_a + \bar{k} \cdot (x - a), \quad (36)$$

$$y'_b + \bar{k} \cdot (x - b) \leq y'(x) \leq y'_b + \underline{k} \cdot (x - b). \quad (37)$$

Підставивши $x = b$ у (36) або $x = a$ у (37), отримуємо (27).

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y'_a + \bar{k} \cdot (x - a) = y'_b + \underline{k} \cdot (x - b) \\ y'_a + \underline{k} \cdot (x - a) = y'_b + \bar{k} \cdot (x - b) \end{cases}, \quad (38)$$

переконуємося, що прямі $y = \bar{k} \cdot x + (y'_a - \bar{k} \cdot a)$, $y = \underline{k} \cdot x + (y'_b - \underline{k} \cdot b)$ перетинаються при $x = x_1 = ((y'_b - y'_a) - \underline{k} \cdot b + \bar{k} \cdot a) / (\bar{k} - \underline{k})$, а прямі $y = \underline{k} \cdot x + (y'_a - \underline{k} \cdot a)$, $y = \bar{k} \cdot x + (y'_b - \bar{k} \cdot b)$ – при $x = x_2 = -((y'_b - y'_a) - \bar{k} \cdot b + \underline{k} \cdot a) / (\bar{k} - \underline{k})$. Тому з (36), (37) випливає істинність тверджень (28) – (30). Тепер істинність твердження (33) перевіряється безпосередньо.

Теорема 4. Нехай функція $y(x)$ один раз неперервно диференційовна у кожній точці x інтервалу $[a, b]$; функції $\underline{g}(x)$, $\bar{g}(x)$ монотонні і такі, що на цьому інтервалі виконується подвійна нерівність

$$\underline{g}(x) \leq y'(x) \leq \bar{g}(x); \quad (39)$$

$$y_a = y(a), \quad y_b = y(b). \quad (40)$$

Тоді у кожній точці $x \in [a, b]$ виконуються такі нерівності:

1) якщо обидві функції $\underline{g}(x)$, $\bar{g}(x)$ не спадні, то

$$y_a + \underline{g}(a) \cdot (x - a) \leq y(x) \leq y_a + \bar{g}(x) \cdot (x - a), \quad (41)$$

$$y_b + \bar{g}(x) \cdot (x - b) \leq y(x) \leq y_b + \underline{g}(b) \cdot (x - b); \quad (42)$$

2) якщо обидві функції $\underline{g}(x)$, $\bar{g}(x)$ не зростаючі, то

$$y_a + \underline{g}(x) \cdot (x - a) \leq y(x) \leq y_a + \bar{g}(a) \cdot (x - a), \quad (43)$$

$$y_b + \bar{g}(b) \cdot (x - b) \leq y(x) \leq y_b + \underline{g}(x) \cdot (x - b); \quad (44)$$

3) якщо функція $\bar{g}(x)$ не спадна, а функція $\underline{g}(x)$ не зростаюча, то

$$y_a + \underline{g}(x) \cdot (x - a) \leq y(x) \leq y_a + \bar{g}(x) \cdot (x - a), \quad (45)$$

$$y_b + \bar{g}(x) \cdot (x - b) \leq y(x) \leq y_b + \underline{g}(x) \cdot (x - b); \quad (46)$$

4) якщо функція $\bar{g}(x)$ не зростаюча, а функція $\underline{g}(x)$ не спадна, то

$$y_a + \underline{g}(a) \cdot (x - a) \leq y(x) \leq y_a + \bar{g}(a) \cdot (x - a), \quad (47)$$

$$y_b + \bar{g}(b) \cdot (x - b) \leq y(x) \leq y_b + \underline{g}(b) \cdot (x - b). \quad (48)$$

Доведення. У разі виконання умов цієї теореми виконуються умови теореми Коші про середнє значення. Тому

$$y(x) = y_a + y'(\xi) \cdot (x - a), \quad (49)$$

$$y(x) = y_b + y'(\eta) \cdot (x - b), \quad (50)$$

де $\xi, \eta \in (a, b)$. Нерівність (39) виконується для всіх x з інтервалу $[a, b]$. Тому вона виконується і у проміжних точках ξ, η . Отже,

$$\underline{g}(\xi) \leq y'(\xi) \leq \bar{g}(\xi), \quad (51)$$

$$\underline{g}(\eta) \leq y'(\eta) \leq \bar{g}(\eta). \quad (52)$$

Помножимо (49) на $x - a$, а (50) – на $x - b$. Оскільки $x - a \geq 0$, $x - b \leq 0$, то, врахувавши (40), (49), (50), звідси отримаємо

$$y_a + \underline{g}(\xi) \cdot (x - a) \leq y(x) \leq y_a + \bar{g}(\xi) \cdot (x - a), \quad (53)$$

$$y_b + \bar{g}(\eta) \cdot (x - b) \leq y(x) \leq y_b + \underline{g}(\eta) \cdot (x - b), \quad (54)$$

відповідно. Враховуючи можливі види монотонності функцій $\underline{g}(x)$, $\bar{g}(x)$, з (53), (54), отримуємо співвідношення (41) – (48).

Зауваження 1. Якщо в інтервалі $[a, b]$ функції $\underline{g}(x)$, $\bar{g}(x)$ не монотонні, то знайшовши проміжки їхньої монотонності та побудувавши об'єднаний список таких проміжків, на кожному спільному проміжку монотонності цих функцій можна застосовувати висновки теореми 4.

Кожен алгоритм розв'язування задачі (1) – (2) на підставі математики функціональних інтервалів розпочинає роботу із визначення функціонального інтервалу, який гарантовано містить невідомий розв'язок цієї задачі. Для цього попередньо вибираємо функціональний інтервал $\tilde{Y}([a, b]) = \{[a, b], \underline{l}(x), \bar{l}(x)\}$, де

$$\underline{l}(x) = \underline{k} \cdot x + (y_a - \underline{k} \cdot a), \quad \bar{l}(x) = \bar{k} \cdot x + (y_a - \bar{k} \cdot a), \quad (55)$$

$$\underline{k} \leq y'_a \leq \bar{k}. \quad (56)$$

Цей вибір виконуємо для реалізації *основного принципу*, згідно з яким розвиток функціональної залежності в кожній точці області визначення будь-якої диференційовної функції відбувається вздовж її дотичної в цій точці. Тому

$$\underline{k} = y'_a - \Delta, \quad \bar{k} = y'_a + \Delta. \quad (57)$$

Далі будуємо функціональний інтервал правої частини рівняння (2)

$$F([a, b]) = \{[a, b], \underline{l}'(x), \bar{l}'(x)\} = \bigcup_{i=1}^n \{[a_i, b_i], \underline{l}'_i(x), \bar{l}'_i(x)\} \stackrel{def}{=} F([a, b], \tilde{Y}([a, b])), \quad (58)$$

де

$$\underline{l}'_i(x) = \underline{k}'_i \cdot x + \underline{m}_i, \quad \bar{l}'_i(x) = \bar{k}'_i \cdot x + \bar{m}_i, \quad (59)$$

точки a_i , b_i – елементи множини точок $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$ розбиття інтервалу $[a, b]$, де $a_1 = a$, $a_{n+1} = b$; $b_i = a_{i+1}$ при інших значеннях індексу i .

Аналізуючи функціональні інтервали $\tilde{Y}([a, b])$ і $F([a, b], \tilde{Y}([a, b]))$, визначаємо функціональний інтервал $Y([a, \tilde{b}])$, який у проміжку $[a, \tilde{b}]$, ($\tilde{b} \leq b$) гарантовано містить невідомий розв'язок задачі (1) – (2).

Методи розв'язування задачі (1) – (2) на підставі математики функціональних інтервалів здебільшого відрізняються саме цим етапом отримання гарантованих двохсторонніх наближень. Далі будуємо основні з них.

4. МЕТОД НА ПІДСТАВІ УЗГОДЖЕННЯ АПРОКСИМАЦІЙ ФУНКЦІЇ І ЇЇ ПОХІДНОЇ

В основу побудови цього методу розв'язування задачі Коші (1) – (2) на підставі математики функціональних інтервалів покладемо висновки про узгодженість між двохсторонніми апроксимаціями функції та її похідної, які випливають із теорем 1 – 3. Тому далі будемо вважати, що на проміжку $[a, b]$ розв'язок $y(x)$ цієї задачі двічі неперервно диференційовний і всі умови теорем 1 – 3 виконуються. Тоді цілеспрямоване застосування цих теорем з врахуванням основного принципу розвитку функціональної залежності у кожній точці її області визначення породжує такий алгоритм розв'язування задачі Коші (1) – (2), який наводимо з розширеними роз'ясненнями.

Алгоритм 1.

1. Створюємо основні та початкові списки:

- точок $\{x_i\}_{i=1}^{n_0+1}$ – розбиття проміжку $[a, b]$ на інтервали $[x_i, x_{i+1}]$. Точки x_i це кінці інтервалу (точки a, b) і характерні точки [5] (точки екстремумів, перегинів, недиференційовності, розривів) всіх елементарних і спеціальних функцій $\varphi_i(x)$, ($i=1, \dots, N$), які входять у аналітичний вираз функції $f(x, y(x))$ правої частини рівняння (1);
- $\{y_a\}$ – список значень верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $Y([a, b])$ – розв’язку задачі (1) – (2);
- $\{y_a\}$ – список значень нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $Y([a, b])$;
- порожні списки $\{\}$ коефіцієнтів і зміщень прямих верхньої та нижньої обмежувальних функцій функціонального інтервалу $Y([a, b])$.

2. Обчислюємо $y'_a = f(a, y_a)$ та вибираємо початковий функціональний інтервал $\tilde{Y}([a, b])$ розв’язку $y(x)$ згідно з формулами (55) – (57). Для цього вибираємо максимальну на всьому проміжку $[a, b]$ допустиму ширину ω майбутнього функціонального інтервалу [6] розв’язку задачі (1) – (2). Тоді величину Δ , ($\Delta > 0$) визначаємо за формулою

$$\Delta = \omega / (2 \cdot (b - a)) . \quad (60)$$

3. Будуємо функціональний інтервал $F([a, b]) = F\{[a, b], \underline{l}'(x), \bar{l}'(x)\}$ правої частини рівняння (1) згідно з формулами (58), (59). Обмежувальні функції $\underline{l}'(x), \bar{l}'(x)$ цього функціонального інтервалу кусково – лінійні

$$\underline{l}'(x) = \begin{cases} \underline{k}'_1 \cdot x + \underline{m}'_1, & a \leq x < \tilde{x}_2 \\ \underline{k}'_2 \cdot x + \underline{m}'_2, & \tilde{x}_2 \leq x < \tilde{x}_3 \\ \dots & \\ \underline{k}'_n \cdot x + \underline{m}'_n, & x_n \leq x \leq b \end{cases} , \quad (61)$$

$$\bar{l}'(x) = \begin{cases} \bar{k}'_1 \cdot x + \bar{m}'_1, & a \leq x < \tilde{x}_2 \\ \bar{k}'_2 \cdot x + \bar{m}'_2, & \tilde{x}_2 \leq x < \tilde{x}_3 \\ \dots & \\ \bar{k}'_n \cdot x + \bar{m}'_n, & \tilde{x}_n \leq x \leq b \end{cases} . \quad (62)$$

У підсумку отримуємо списки:

- точок $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{n+1}$ – розбиття проміжку $[a, b]$ на інтервали $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$;
- кутових коефіцієнтів $\{\bar{k}'_i\}_{i=1}^n$ прямих верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу похідної $y'(x)$;
- кутових коефіцієнтів $\{\underline{k}'_i\}_{i=1}^n$ прямих нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу похідної $y'(x)$;

- зміщень $\{\bar{m}'_i\}_{i=1}^n$ прямих верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу похідної $y'(x)$;
- зміщень $\{\underline{m}'_i\}_{i=1}^n$ прямих нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу похідної $y'(x)$;
- значень $\{\bar{f}'_i\}_{i=1}^{n+1}$ верхньої обмежувальної функції у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{n+1}$ функціонального інтервалу похідної $y'(x)$;
- значень $\{\underline{f}'_i\}_{i=1}^{n+1}$ нижньої обмежувальної функції у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{n+1}$ функціонального інтервалу похідної $y'(x)$.

4. Будемо функціональний інтервал $S_a([a, b]) = S_a\{[a, b], \underline{p}_a(x), \bar{p}_a(x)\}$, де

$$\underline{p}_a(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot \underline{k}'_1 \cdot x^2 + \underline{m}'_1 \cdot x - 0.5 \cdot \underline{k}'_1 \cdot a^2 - \underline{m}'_1 \cdot a + y_a, & a \leq x < \tilde{x}_2 \\ 0.5 \cdot \underline{k}'_2 \cdot x^2 + \underline{m}'_2 \cdot x - 0.5 \cdot \underline{k}'_2 \cdot \tilde{x}_2^2 - \underline{m}'_2 \cdot \tilde{x}_2 + \bar{y}_2, & \tilde{x}_2 \leq x < \tilde{x}_3 \\ \dots \\ 0.5 \cdot \underline{k}'_n \cdot x^2 + \underline{m}'_n \cdot x - 0.5 \cdot \underline{k}'_n \cdot \tilde{x}_n^2 - \underline{m}'_n \cdot \tilde{x}_n + \bar{y}_n, & \tilde{x}_n \leq x \leq b \end{cases}, \quad (63)$$

$$\bar{p}_a(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot \bar{k}'_1 \cdot x^2 + \bar{m}'_1 \cdot x - 0.5 \cdot \bar{k}'_1 \cdot a^2 - \bar{m}'_1 \cdot a + y_a, & a \leq x < \tilde{x}_2 \\ 0.5 \cdot \bar{k}'_2 \cdot x^2 + \bar{m}'_2 \cdot x - 0.5 \cdot \bar{k}'_2 \cdot \tilde{x}_2^2 - \bar{m}'_2 \cdot \tilde{x}_2 + \bar{y}_2, & \tilde{x}_2 \leq x < \tilde{x}_3 \\ \dots \\ 0.5 \cdot \bar{k}'_n \cdot x^2 + \bar{m}'_n \cdot x - 0.5 \cdot \bar{k}'_n \cdot \tilde{x}_n^2 - \bar{m}'_n \cdot \tilde{x}_n + \bar{y}_n, & \tilde{x}_n \leq x \leq b \end{cases}, \quad (64)$$

де

$$\underline{y}_i = 0.5 \cdot \underline{k}'_{i-1} \cdot x_i^2 + \underline{m}'_{i-1} \cdot x_i - 0.5 \cdot \underline{k}'_{i-1} \cdot \tilde{x}_{i-1}^2 - \underline{m}'_{i-1} \cdot \tilde{x}_{i-1} + y_{i-1}, \quad (65)$$

$$\bar{y}_i = 0.5 \cdot \bar{k}'_{i-1} \cdot x_i^2 + \bar{m}'_{i-1} \cdot x_i - 0.5 \cdot \bar{k}'_{i-1} \cdot \tilde{x}_{i-1}^2 - \bar{m}'_{i-1} \cdot \tilde{x}_{i-1} + \bar{y}_{i-1}, \quad (66)$$

$$\underline{y}_1 = y_a, \bar{y}_1 = y_a, i = \overline{2, n}. \quad (67)$$

Висновки теорем 1, 2 дають підставу стверджувати, що функціональний інтервал $S_a([a, b])$ містить частину значень розв'язку $y(x)$, починаючи з його початкового значення y_a .

5. Визначаємо таке найбільше число \tilde{b} , ($\tilde{b} \leq b$), де $S_a([a, \tilde{b}]) \subseteq \tilde{Y}([a, \tilde{b}])$ і $y(x) \in S_a([a, \tilde{b}])$. Тоді $S_a([a, \tilde{b}])$ на інтервалі $[a, \tilde{b}]$ гарантовано містить невідомий розв'язок задачі (1) – (2). Для цього, послідовно обчислюючи значення верхньої та нижньої обмежувальних функцій функціонального інтервалу $S_a([a, b])$, значення верхньої та нижньої обмежувальних функцій функціонального інтервалу $\tilde{Y}([a, b])$ у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{n+1}$ формуємо такі списки:

- $\{\bar{p}_i\}_{i=1}^{n+1}$ – список значень верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $S_a([a, b])$ у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{n+1}$;

- $\{\underline{p}_i\}_{i=1}^{n+1}$ – список значень нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $S_a([a, b])$ у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{n+1}$;
- $\{\tilde{y}_i\}_{i=1}^{n+1}$ – список значень верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $\tilde{Y}([a, b])$ у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{n+1}$;
- $\{\underline{y}_i\}_{i=1}^{n+1}$ – список значень нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $\tilde{Y}([a, b])$ у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{n+1}$.

Значення \tilde{b} це та перша точка x_p розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{n+1}$, в якій

$$\bar{y}_p \leq \tilde{y}_p, \text{ але } \bar{y}_{p+1} > \tilde{y}_{p+1}, \quad (68)$$

або

$$\underline{y}_p \geq \tilde{y}_p, \text{ але } \underline{y}_{p+1} < \tilde{y}_{p+1}, \quad (69)$$

або виконується (68) і (69).

6. Функціональний інтервал $S_a([a, \tilde{b}])$ на інтервалі $[a, \tilde{b}]$ гарантовано містить невідомий розв'язок задачі (1) – (2). Отже, при бажанні, його вже можна вважати розв'язком задачі (1) – (2) на інтервалі $[a, \tilde{b}]$ у вигляді функціонального інтервалу. Однак його ширину можна суттєво зменшити.

Оскільки обмежувальні функції функціонального інтервалу $S_a([a, \tilde{b}])$ зазвичай складаються з квадратичних функцій, то складно його безпосередньо використати для знаходження на інтервалі $[a, \tilde{b}]$ розв'язку – функціонального інтервалу $Y([a, \tilde{b}])$ з найменшою можливою шириною. Тому будемо лінійний функціональний інтервал $L([a, \tilde{b}]) = L\{\underline{l(x)}, \overline{l(x)}\}$, який гарантовано містить невідомий розв'язок задачі (1) – (2). Верхню $\overline{l(x)}$ і нижню $\underline{l(x)}$ обмежувальні функції будемо у вигляді кусково – лінійних функцій, використовуючи опуклість квадратних парабол. Якщо відповідна парабола є частиною верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $S_a([a, \tilde{b}])$ і опукла вгору, то в кусково – лінійну функцію $\overline{l(x)}$ включаємо її відповідні дотичні (див. [5]); інакше відповідні січні. Якщо відповідна парабола є частиною нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $S_a([a, b])$ і опукла вниз, то в кусково – лінійну функцію $\underline{l(x)}$ включаємо її відповідні дотичні; інакше відповідні січні.

7. Будемо функціональний інтервал $F([a, b], L([a, \tilde{b}]))$ правої частини рівняння (2) згідно з формулами (58), (59).

8. Будемо функціональний інтервал $Y([a, \tilde{b}])$, обмежувальні функції якого знаходимо за (63) – (67). Він гарантовано містить розв'язок $y(x)$ задачі (1) – (2) на інтервалі $[a, \tilde{b}]$ і має невелику ширину.

9. Накопичуємо відповідну інформацію в основних списках сформованих у пункті 1 цього алгоритму.

10. Формуємо нову задачу Коші з інтервальною [4] початковою умовою. Для цього очищаємо робочі списки, сформовані у пункті 1 цього алгоритму і знову формуємо їх у попередній початковій формі. Далі розв'язуємо дві задачі Коші:

$$y' = f(x, y(x)), \quad (70)$$

$$y(\tilde{b}) = y_1, \quad (71)$$

і

$$y' = f(x, y(x)), \quad (72)$$

$$y(\tilde{b}) = y_2, \quad (73)$$

де

$$y_1 = \bar{y}_p, \quad y_2 = \underline{y}_p. \quad (74)$$

11. Розв'язуємо ці задачі Коші на інтервалі $[\tilde{b}, b]$, послідовно реалізуючи пункти 2 –

11. У цьому випадку верхньою обмежувальною функцією функціонального інтервалу $Y([\tilde{b}, \tilde{b}])$, де точку \tilde{b} ($\tilde{b} \leq \tilde{b} \leq b$) визначають співвідношення (68), (69), є верхня обмежувальна функція функціонального інтервалу $Y_1([\tilde{b}, \tilde{b}])$ – розв'язку задачі (70) – (71), а нижньою обмежувальною функцією функціонального інтервалу $Y([\tilde{b}, \tilde{b}])$ – нижня обмежуюча функція функціонального інтервалу $Y_2([\tilde{b}, \tilde{b}])$ – розв'язку задачі (72) – (73).

12. Пункти 2 – 11 алгоритму повторюємо циклічно доти, доки виконається рівність $\tilde{b} = b$, включно.

На підставі реалізації алгоритму 1 отримуємо списки:

- $\{x_i\}_{i=1}^{M+1}$ – точок остаточного розбиття інтервалу $[a, b]$;
- $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^M, \{\bar{b}_i\}_{i=1}^M, \{\bar{c}_i\}_{i=1}^M$ – коефіцієнтів $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i$, відповідно, парабол (64) верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $Y([a, b])$ – розв'язку задачі (1) – (2);
- $\{\underline{a}_i\}_{i=1}^M, \{\underline{b}_i\}_{i=1}^M, \{\underline{c}_i\}_{i=1}^M$ – коефіцієнтів $\underline{a}_i, \underline{b}_i, \underline{c}_i$, відповідно, парабол (63) нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $Y([a, b])$;
- $\{\bar{y}_i\}_{i=1}^{M+1}$ – список значень верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $Y([a, b])$ у точках $\{x_i\}_{i=1}^{M+1}$;
- $\{\underline{y}_i\}_{i=1}^{M+1}$ – список значень нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $Y([a, b])$ у точках $\{x_i\}_{i=1}^{M+1}$.

Отримані результати цілком описують двосторонні наближення розв'язку задачі Коші (1) – (2) так отриманими сплайнами – верхньою та нижньою обмежувальними функціями функціонального інтервалу $Y([a, b])$.

Зауваження 2. Для визначення коефіцієнтів \underline{k}, \bar{k} формулу (57) можна замінити на $\underline{k} = y'_a - \Delta_1, \bar{k} = y'_a + \Delta_2$, де $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0$. Тоді у формулі (60) $\Delta = (\Delta_1 + \Delta_2)/2$.

Зауваження 3. Якщо максимальна ширина інтервалів $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$ досить велика, то доцільно за значення \tilde{b} вибирати найменше значення серед абсцис точок перетинів верхніх обмежувальних функцій функціональних інтервалів $\tilde{Y}([a, b])$, $S([a, b])$; і нижніх обмежувальних функції цих функціональних інтервалів.

Зауваження 4. Якщо на інтервалі $[a, \tilde{b}]$ пункти 3–8 алгоритму 1 повторювати при тому ж значенні \tilde{b} , то через деяку кількість повторень ширина функціонального інтервалу $Y([a, \tilde{b}])$ стане меншою від будь-якої наперед заданої. Однак стрімко збільшується кількість точок розбиття інтервалу $[a, \tilde{b}]$ і, відповідно, кількість елементів списків результатів.

Зауваження 5. Якщо максимальна ширина інтервалів $[x_i, x_{i+1}]$ розбиття проміжку $[a, b]$ велика, то за точку \tilde{b} в пункті 5 алгоритму доцільно взяти найменший розв'язок двох рівнянь, які отримуємо, прирівнюючи верхні та нижні обмежувальні функції функціональних інтервалів $\tilde{Y}([a, b])$ і $S_a([a, b])$, відповідно.

5. АНАЛОГ МЕТОДУ МУРА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ НА ПІДСТАВІ МАТЕМАТИКИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ

В основу побудови аналога метода Мура розв'язування задачі Коші (1) – (2) на підставі математики функціональних інтервалів приймемо теорему Коші про середнє значення. Тому далі будемо вважати, що на проміжку $[a, b]$ розв'язок $y(x)$ цієї задачі один раз неперервно диференційовний.

Оскільки функціональний інтервал $F([a, b], \tilde{Y}([a, b]))$ отримуємо у вигляді лінійного функціонального інтервалу [5], то доцільно в теоремі 4 розглянути випадок лінійних функцій $\underline{g}(x)$, $\overline{g}(x)$. Отже, виникає потреба у теоремі 5, яка є частинним випадком загальної теореми 4.

Теорема 5. Нехай функція $y(x)$ один раз неперервно диференційовна у кожній точці x інтервалу $[a, b]$ і на цьому інтервалі виконується подвійна нерівність

$$\underline{k}' \cdot x + \underline{m}' \leq y'(x) \leq \overline{k}' \cdot x + \overline{m}'; \quad (75)$$

$$y_a = y(a), \quad y_b = y(b), \quad (76)$$

де \underline{k}' , \underline{m}' , \overline{k}' , \overline{m}' – деякі константи. Тоді у кожній точці $x \in [a, b]$ виконуються такі нерівності:

1) якщо $\underline{k}' \geq 0$ і $\overline{k}' \geq 0$, то

$$(\underline{k}' \cdot a + \underline{m}') \cdot x - (\underline{k}' \cdot a + \underline{m}') \cdot a + y_a \leq y(x) \leq \overline{k}' \cdot x^2 + (\overline{m}' - \overline{k}' \cdot a) \cdot x - \overline{m}' \cdot a + y_a, \quad (77)$$

$$\overline{k}' \cdot x^2 + (\overline{m}' - \overline{k}' \cdot b) \cdot x - \overline{m}' \cdot b + y_b \leq y(x) \leq (\underline{k}' \cdot b + \underline{m}') \cdot x - (\underline{k}' \cdot b + \underline{m}') \cdot b + y_b; \quad (78)$$

2) якщо $\underline{k}' \leq 0$ і $\overline{k}' \leq 0$, то

$$\underline{k}' \cdot x^2 + (\underline{m}' - \underline{k}' \cdot a) \cdot x - \underline{m}' \cdot a + y_a \leq y(x) \leq (\overline{k}' \cdot a + \overline{m}') \cdot x - (\overline{k}' \cdot a + \overline{m}') \cdot a + y_a, \quad (79)$$

$$(\overline{k}' \cdot b + \overline{m}') \cdot x - (\overline{k}' \cdot b + \overline{m}') \cdot b + y_b \leq y(x) \leq \underline{k}' \cdot x^2 + (\underline{m}' - \underline{k}' \cdot b) \cdot x - \underline{m}' \cdot b + y_b; \quad (80)$$

3) якщо $\overline{k}' \geq 0$ і $\underline{k}' \leq 0$, то

$$\underline{k}' \cdot x^2 + (\underline{m}' - \underline{k}' \cdot a) \cdot x - \underline{m}' \cdot a + y_a \leq y(x) \leq \bar{k}' \cdot x^2 + (\bar{m}' - \bar{k}' \cdot a) \cdot x - \bar{m}' \cdot a + y_a, \quad (81)$$

$$\bar{k}' \cdot x^2 + (\bar{m}' - \bar{k}' \cdot b) \cdot x - \bar{m}' \cdot b + y_b \leq y(x) \leq \underline{k}' \cdot x^2 + (\underline{m}' - \underline{k}' \cdot b) \cdot x - \underline{m}' \cdot b + y_b; \quad (82)$$

4) якщо $\bar{k}' \leq 0$ і $\underline{k}' \geq 0$, то

$$(\underline{k}' \cdot a + \underline{m}') \cdot x - (\underline{k}' \cdot a + \underline{m}') \cdot a + y_a \leq y(x) \leq (\bar{k}' \cdot a + \bar{m}') \cdot x - (\bar{k}' \cdot a + \bar{m}') \cdot a + y_a; \quad (83)$$

$$(\bar{k}' \cdot b + \bar{m}') \cdot x - (\bar{k}' \cdot b + \bar{m}') \cdot b + y_b \leq y(x) \leq (\underline{k}' \cdot b + \underline{m}') \cdot x - (\underline{k}' \cdot b + \underline{m}') \cdot b + y_b. \quad (84)$$

Будемо вважати, що всі умови теорем 3 – 5 виконуються. Тоді цілеспрямоване застосування цих теорем з врахуванням основного принципу розвитку функціональної залежності у кожній точці її області визначення породжує такий алгоритм розв'язування задачі Коші (1) – (2). В ньому всі позначення збігаються з відповідними позначеннями алгоритму 1.

Алгоритм 2.

Пункти 1 – 3 цього алгоритму цілком такі ж, як і відповідні пункти алгоритму 1.

4. Будуємо функціональний інтервал $S([a, b])$, обмежувальні функції якого знаходимо за аналітичними виразами правих і лівих частин формул (77) – (84), відповідно. Він містить частину значень розв'язку $y(x)$, починаючи з його початкового значення y_a .

5. Визначаємо таке найбільше число \tilde{b} , ($\tilde{b} \leq b$), за якого $S([a, \tilde{b}]) \subseteq \tilde{Y}([a, \tilde{b}])$ і $y(x) \in S([a, \tilde{b}])$. Тоді $S([a, \tilde{b}])$ на інтервалі $[a, \tilde{b}]$ гарантовано містить невідомий розв'язок задачі (1) – (2). Процес визначення числа \tilde{b} цілком такий, як і в алгоритмі 1, але, очевидно, значення цієї величини інше, оскільки $S_a([a, b]) \neq S([a, b])$.

Пункти 6 – 12 цього алгоритму цілком такі самі, як і відповідні пункти алгоритму 1.

На підставі реалізації алгоритму 2 отримуємо списки:

- $\{x_i\}_{i=1}^{M+1}$ – точок остаточного розбиття інтервалу $[a, b]$;
- $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^M$, $\{\bar{b}_i\}_{i=1}^M$, $\{\bar{c}_i\}_{i=1}^M$ – коефіцієнтів \bar{a}_i , \bar{b}_i , \bar{c}_i , відповідно, парабол (77) – (84) верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $Y([a, b])$ – розв'язку задачі (1) – (2);
- $\{\underline{a}_i\}_{i=1}^M$, $\{\underline{b}_i\}_{i=1}^M$, $\{\underline{c}_i\}_{i=1}^M$ – коефіцієнтів \underline{a}_i , \underline{b}_i , \underline{c}_i , відповідно, парабол (77) – (84) нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $Y([a, b])$;
- $\{\bar{y}_i\}_{i=1}^{M+1}$ – список значень верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $Y([a, b])$ у точках $\{x_i\}_{i=1}^{M+1}$;
- $\{\underline{y}_i\}_{i=1}^{M+1}$ – список значень нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $Y([a, b])$ у точках $\{x_i\}_{i=1}^{M+1}$.

Елементи цих списків суттєво відрізняються від елементів відповідних списків алгоритму 1.

Отримані результати цілком описують двосторонні наближення розв'язку задачі Коші (1) – (2) так отриманими сплайнами – верхньою та нижньою обмежувальними функціями функціонального інтервалу $Y([a, b])$. Очевидно, що зауваження 2 – 5 актуальні і для алгоритму 2.

6. МЕТОДИ МАТЕМАТИКИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ, ЗАСНОВАНІ НА ІДЕЇ МЕТОДІВ РУНГЕ–КУТТА

Головна ідея методів Рунге-Кутта розв'язування задачі Коші апроксимування значень похідних функції вищих порядків лінійними комбінаціями значень першої похідної цієї функції у відповідних точках з найбільшою можливою точністю – в математиці функціональних інтервалів реалізується на підставі таких міркувань.

Згідно з (1) $y' = f(x, y(x))$. Тому

$$y'' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot y'. \quad (85)$$

Нехай

$$u_x^{(1)}(x, y) = \frac{df}{dx}, \quad (86)$$

$$u_y^{(1)}(x, y) = \frac{df}{dy}, \quad (87)$$

$$u_{xx}^{(2)}(x, y) = \frac{df}{dx^2}, \quad (88)$$

$$u_{xy}^{(2)}(x, y) = \frac{df}{\partial x \partial y}, \quad (89)$$

$$u_{yy}^{(2)}(x, y) = \frac{df}{dy^2}. \quad (90)$$

Тоді з (85) матимемо

$$y'' = u_x^{(1)}(x, y) + u_y^{(1)}(x, y) \cdot f(x, y). \quad (91)$$

Аналогічно

$$y''' = y'' \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + (y')^2 \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + 2 \cdot y' \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad (92)$$

тобто

$$y''' = u_{yy}^{(2)}(x, y) \cdot (f(x, y))^2 + ((u_y^{(1)}(x, y))^2 + 2 \cdot u_{xy}^{(2)}(x, y)) \cdot f(x, y) + u_{xx}^{(2)}(x, y) + u_x^{(1)}(x, y) \cdot u_y^{(1)}(x, y). \quad (93)$$

Нехай розв'язок $y(x)$ задачі (1) – (2) в проміжку $[a, b]$ n разів неперервно диференційовний. Тоді

$$y(x) = y(a) + y'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''(a) \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot y^{(n)}(\xi_n) \cdot (x-a)^n, \quad (94)$$

де $\xi_n \in (a, b)$. Зокрема,

$$y(x) = y(a) + y'(\xi_1) \cdot (x-a), \quad (95)$$

$$y(x) = y(a) + y'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''(\xi_2) \cdot (x-a)^2, \quad (96)$$

$$y(x) = y(a) + y'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''(a) \cdot (x-a)^2 + \frac{1}{3!} \cdot y'''(\xi_3) \cdot (x-a)^3. \quad (97)$$

Тому, використавши (1), (2) і (91), (93), з (95) – (97), отримуємо

$$y(x) = y_a + f(\xi_1, y(\xi_1)) \cdot (x-a), \quad (98)$$

$$y(x) = y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot (u_x^{(1)}(\xi_2, y(\xi_2)) + u_y^{(1)}(\xi_2, y(\xi_2))) \cdot f(\xi_2, y(\xi_2)) \cdot (x-a)^2, \quad (99)$$

$$y(x) = y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''_a \cdot (x-a)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (u_{yy}^{(2)}(\xi_3, y(\xi_3)) \cdot (f(\xi_3, y(\xi_3)))^2 + ((u_y^{(1)}(\xi_3, y(\xi_3)))^2 + 2 \cdot u_{xy}^{(2)}(\xi_3, y(\xi_3))) \cdot f(\xi_3, y(\xi_3)) + u_{xx}^{(2)}(\xi_3, y(\xi_3)) + u_x^{(1)}(\xi_3, y(\xi_3)) \cdot u_y^{(1)}(\xi_3, y(\xi_3))) \cdot (x-a)^3, \quad (100)$$

де

$$y_a = y(a), y'_a = y'(a) = f(a, y_a), y''_a = y''(a) = u_x^{(1)}(a, y_a) + u_y^{(1)}(a, y_a) \cdot y'_a. \quad (101)$$

Оскільки функції $u_x^{(1)}(x, y)$, $u_y^{(1)}(x, y)$, $u_{xx}^{(2)}(x, y)$, $u_{xy}^{(2)}(x, y)$, $u_{yy}^{(2)}(x, y)$ визначені через функцію $f(x, y(x))$, то гарантовані межі їхніх значень у будь-якій точці можна отримати, побудувавши функціональні інтервали цих функцій на підставі формул (86) – (90), відповідно. У цьому випадку функціональний інтервал функції $f(x, y(x))$ будуємо згідно з пунктом 2 алгоритмів 1, 2. Це дає змогу будувати алгоритми розв'язування задачі (1), (2), в яких реалізована головна ідея методів Рунге-Кутта, засновані на висновках такої теореми.

Теорема 6. Нехай функція $y(x)$ n разів неперервно диференційовна у кожній точці x інтервалу $[a, b]$; функції $\underline{g}(x)$, $\overline{g}(x)$ монотонні і такі, що на цьому інтервалі виконується подвійна нерівність

$$\underline{g}(x) \leq y^{(n)}(x) \leq \overline{g}(x); \quad (102)$$

$$y_a^{(i)} = y^{(i)}(a), y_b^{(i)} = y^{(i)}(b), (i = \overline{1, n}). \quad (103)$$

Тоді у кожній точці $x \in [a, b]$ виконуються такі нерівності:

1) якщо на проміжку $[a, b]$ обидві функції $\underline{g}(x)$, $\overline{g}(x)$ монотонно зростаючі, то

$$y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''_a \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(a) \cdot (x-a)^n \leq y(x) \leq y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''_a \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \overline{g}(x) \cdot (x-a)^n, \quad (104)$$

$$y_b + y'_b \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y''_b \cdot (x-b)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \overline{g}(x) \cdot (x-b)^n \leq y(x) \leq y_b + y'_b \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y''_b \cdot (x-b)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(b) \cdot (x-b)^n; \quad (105)$$

2) якщо на проміжку $[a, b]$ обидві функції $\underline{g}(x)$, $\overline{g}(x)$ монотонно спадні, то

$$y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''_a \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(x) \cdot (x-a)^n \leq y(x) \leq y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''_a \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \overline{g}(a) \cdot (x-a)^n, \quad (106)$$

$$y_b + y'_b \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y''_b \cdot (x-b)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \overline{g}(b) \cdot (x-b)^n \leq y(x) \leq$$

$$y_b + y'_b \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y''_b \cdot (x-b)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(x) \cdot (x-b)^n; \quad (107)$$

3) якщо на проміжку $[a, b]$ функція $\bar{g}(x)$ монотонно зростаюча, а функція $\underline{g}(x)$ монотонно спадна, то

$$y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''_a \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(x) \cdot (x-a)^n \leq y(x) \leq y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''_a \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \bar{g}(x) \cdot (x-a)^n, \quad (108)$$

$$y_b + y'_b \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y''_b \cdot (x-b)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \bar{g}(x) \cdot (x-b)^n \leq y(x) \leq y_b + y'_b \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y''_b \cdot (x-b)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(x) \cdot (x-b)^n; \quad (109)$$

4) якщо на проміжку $[a, b]$ функція $\bar{g}(x)$ монотонно спадна, а функція $\underline{g}(x)$ монотонно зростаюча, то

$$y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''_a \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(a) \cdot (x-a)^n \leq y(x) \leq y_a + y'_a \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot y''_a \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \bar{g}(a) \cdot (x-a)^n, \quad (110)$$

$$y_b + y'_b \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y''_b \cdot (x-b)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \bar{g}(b) \cdot (x-b)^n \leq y(x) \leq y_b + y'_b \cdot (x-b) + \frac{1}{2} \cdot y''_b \cdot (x-b)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \underline{g}(b) \cdot (x-b)^n. \quad (111)$$

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 4.

Зауваження 6. Якщо в інтервалі $[a, b]$ функції $\underline{g}(x)$, $\bar{g}(x)$ не монотонні, то теорему 6 застосовуємо згідно з зауваженням 1.

Будемо вважати, що всі умови теорем 3 – 6 виконуються. Тоді задачу Коші (1) – (2) можна розв'язати за допомогою такого алгоритму. В ньому всі позначення збігаються з відповідними позначеннями алгоритмів 1, 2.

Алгоритм 3.

Пункти 1 – 3 цього алгоритму цілком такі самі, як і відповідні пункти алгоритмів 1, 2.
4. Будуємо функціональний інтервал $S([a, b])$, обмежувальні функції якого знаходимо за аналітичними виразами правих і лівих частин формул (104) – (109), відповідно. Він містить частину значень розв'язку $y(x)$, починаючи з його початкового значення y_a . Однак при $n \geq 2$ ширина цього функціонального інтервалу $S([a, b])$ значно менша від ширини відповідних функціональних інтервалів $S([a, b])$, які отримуємо в пункті 4 алгоритмів 1, 2.

5. Визначаємо таке найбільше число \tilde{b} , ($\tilde{b} \leq b$), за якого $S([a, \tilde{b}]) \subseteq \tilde{Y}([a, \tilde{b}])$ і $y(x) \in S([a, \tilde{b}])$. Тоді $S([a, \tilde{b}])$ на інтервалі $[a, \tilde{b}]$ гарантовано містить невідомий розв'язок задачі (1) – (2). Процес визначення числа \tilde{b} цілком такий, як і в

алгоритмі 1. Однак тут при $n \geq 2$ число \tilde{b} розташоване значно ближче до числа b , а часто і збігається з ним.

Пункти 6 – 12 цього алгоритму цілком такі самі, як і відповідні пункти алгоритму 1.

На підставі реалізації алгоритму 3 отримуємо списки, аналогічні до відповідних списків значень алгоритмів 1, 2.

Отримані результати цілком описують двосторонні наближення розв'язку задачі Коші (1)–(2) так отриманими сплайнами – верхньою та нижньою обмежувальними функціями функціонального інтервалу $Y([a, b])$. Однак при $n \geq 2$ ці обмежувальні функції є сплайнами вищих порядків і гарантовані двосторонні наближення розв'язку задачі мають значно меншу ширину. Очевидно, що зауваження 2 – 5 актуальні і для алгоритму 3.

Зауваження 7. Аналог методу Мура на підставі математики функціональних інтервалів є аналогом методу Рунге-Кутта на підставі математики функціональних інтервалів при $n = 1$.

Зауваження 8. При $n > 3$ аналоги методу Рунге-Кутта на підставі математики функціональних інтервалів використовувати недоцільно, оскільки в цьому випадку обчислювальні формули стають громіздкими, що приводить до різкого зростання обсягу обчислень.

Зауваження 9. На кожному кроці всіх цих алгоритмів доцільно застосовувати методи зменшення ефекту розширення відповідних функціональних інтервалів. Зокрема, цього можна досягти за допомогою методу, заснованого на використанні висновків теорем 2, 3. Згідно з цими теоремами (див. [7], рис. 1) графік верхньої обмежувальної параболи $\underline{p}_b(x)$ функціонального інтервалу $Y_b([a, b])$ проходить не нижче точки з координатами (a, y_a) ; а графік нижньої обмежувальної параболи $\bar{p}_b(x)$ цього функціонального інтервалу – не вище точки з координатами (a, y_a) .

Існують й інші методи, засновані на інших принципах. Зокрема, розроблений метод послідовного уточнення інтервалу допустимих значень для величини $y'_b = y'(b)$.

7. ЧИСЛОВІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Приклад 1. Нехай потрібно побудувати функціональний інтервал, ширина якого не більша за $\omega = 0.1$, і який на проміжку $[0, b]$ гарантовано містить розв'язок такої задачі Коші:

$$y' = e^x \cdot y^2 - 2 \cdot y, \quad (112)$$

$$y(0) = 2. \quad (113)$$

Задачу (112)–(113) будемо розв'язувати за допомогою алгоритму 1. В цій задачі $a = 0$, $y_a = 2$. Отже, використавши (1), отримаємо $y'_a = 0$. Візьмемо $\Delta_1 = 0.1$, $\Delta_2 = 0.3$. Тоді $\underline{k} = -0.1$, $\underline{m} = 2$, $\bar{k} = 0.3$, $\bar{m} = 2$, $\Delta = 0.4$. Визначаємо згідно з (60) можливу верхню межу $b = 0.25$ проміжку $[0, b]$. Згідно з (55) визначаємо $\tilde{Y}([0, 0.25]) = \{[0, 0.25], -0.1 \cdot x + 2, 0.3 \cdot x + 2\}$.

За формулами (58), (59) будемо функціональний інтервал правої частини рівняння (113) $F([0, 0.25]) = F([0, 0.25], \tilde{Y}([0, 0.25]))$. На підставі цього отримуємо такі списки:

$\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^9 = \{0, 0.0319009, 0.0638017, 0.0944009, 0.125, 0.156901, 0.188802, 0.219401, 0.25\}$ – точок \tilde{x}_i розбиття проміжку $[0, 0.25]$ на інтервали $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$;

$\{\bar{k}_i\}_{i=1}^8 = \{5.58151, 5.66131, 6.01342, 6.0949, 6.50154, 6.59365, 7.00587, 7.09991\}$ – кутових коефіцієнтів \bar{k}_i' прямих верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу похідної $y'(x)$;

$\{\bar{m}_i\}_{i=1}^8 = \{0., -0.00254564, -0.0250108, -0.0327024, -0.0835333, -0.0979844, -0.175812, -0.196445\}$ – зміщень \bar{m}_i' прямих верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу похідної $y'(x)$;

$\{\underline{k}_i\}_{i=1}^8 = \{2.98724, 2.96172, 3.46429, 3.43655, 3.41406, 3.38551, 3.94787, 3.91683\}$ – кутових коефіцієнтів k_i' прямих нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу похідної $y'(x)$;

$\{\underline{m}_i\}_{i=1}^8 = \{0., 0.000814133, -0.0312505, -0.0286319, -0.0258216, -0.021341, -0.127516, -0.120706\}$ – зміщень \underline{m}_i' прямих нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу похідної $y'(x)$;

$\{\bar{f}_i\}_{i=1}^9 = \{0., 0.178055, 0.358656, 0.542661, 0.72916, 0.936564, 1.14691, 1.36128, 1.57853\}$ – значень \bar{f}_i' верхньої обмежувальної функції у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^9$ функціонального інтервалу похідної $y'(x)$;

$\{\underline{f}_i\}_{i=1}^9 = \{0., 0.0952956, 0.189777, 0.295781, 0.400936, 0.509848, 0.617849, 0.73865, 0.858502\}$ – значень \underline{f}_i' нижньої обмежувальної функції у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^9$ функціонального інтервалу похідної $y'(x)$.

Будемо функціональний інтервал $S_a([0, 0.25]) = S_a\{[0, 0.25], \underline{p}_a(x), \bar{p}_a(x)\}$, використовуючи формули (63) – (67). На підставі цього отримуємо такі списки:

$\{\bar{y}_i\}_{i=1}^9 = \{2, 2.00957, 2.01914, 2.02832, 2.0375, 2.04707, 2.05664, 2.06582, 2.075\}$ – список значень верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $\tilde{Y}([0, 0.25])$ у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^9$,

$\{\bar{p}_i\}_{i=1}^9 = \{2, 2.00284, 2.0114, 2.02519, 2.04465, 2.07122, 2.10445, 2.14282, 2.1878\}$ – список значень верхньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $S_a([0, 0.25])$ у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^9$,

$\{p_i\}_{i=1}^9 = \{2, 2.00152, 2.00607, 2.0135, 2.02416, 2.03868, 2.05667, 2.07742, 2.10186\}$ – список значень нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $S_a([0, 0.25])$ у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^9$,
 $\{y_i\}_{i=1}^9 = \{2, 1.99681, 1.99362, 1.99056, 1.9875, 1.98431, 1.98112, 1.97806, 1.975\}$ – список значень нижньої обмежувальної функції функціонального інтервалу $\tilde{Y}([0, 0.25])$ у точках розбиття $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^9$.

За формулами (68), (69) визначаємо $\tilde{b} = 0.0944009$.

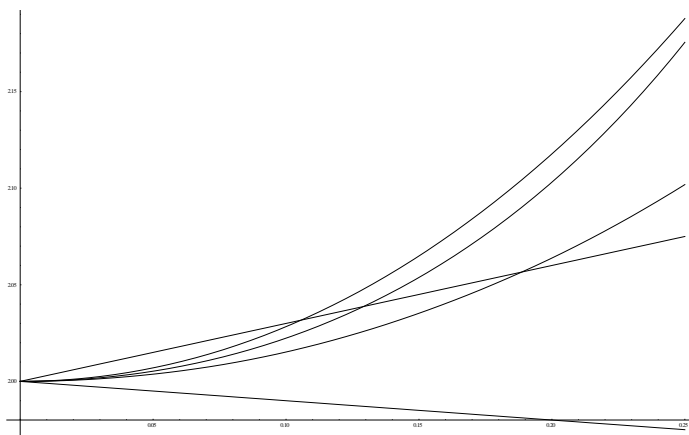


Рис. 1. Початковий функціональний інтервал (обмежувальні функції – дві прямі) розв’язку задачі (112) – (113), її точний розв’язок (середня крива лінія) і результат – функціональний інтервал з обмежувальними функціями у вигляді квадратичних сплайнів (крайні криві лінії)

Будуємо лінійний функціональний інтервал $L([0, 0.0944009])$.

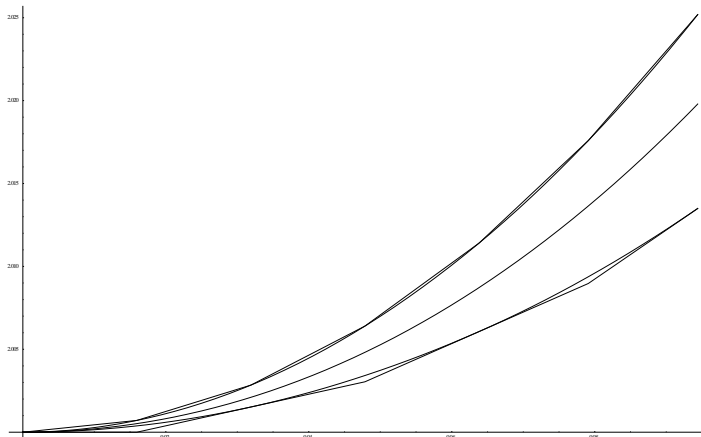


Рис. 2. Точний розв’язок задачі (112) – (113) (середня крива лінія), результат – функціональний інтервал з обмежувальними функціями у вигляді квадратичних сплайнів (крайні криві лінії) і результат – лінійний функціональний інтервал з обмежувальними функціями у вигляді лінійних сплайнів

Список ширини функціонального інтервалу – розв'язку у точках розбиття

$\{x_i\}_{i=1}^{48}$ є таким:

$\{\omega_i\}_{i=1}^{48} = \{0,5.48951 \cdot 10^{-7}, 2.19722 \cdot 10^{-6}, 4.90715 \cdot 10^{-6}, 8.65275 \cdot 10^{-6}, 0.0000134831, 0.0000194245, 0.0000264278, 0.000034478, 0.0000435623, 0.0000536188, 0.0000645871, 0.000076463, 0.0000893167, 0.000103153, 0.000117901, 0.000133567, 0.000151329, 0.000172286, 0.000196343, 0.000223529, 0.000253971, 0.000287643, 0.000324419, 0.000364359, 0.000407579, 0.000453967, 0.000503364, 0.000555863, 0.00061166, 0.000670662, 0.000732676, 0.000797827, 0.000864536, 0.000936341, 0.00101302, 0.00109473, 0.00118176, 0.00127393, 0.00137099, 0.00147314, 0.00158055, 0.00169287, 0.00180976, 0.00193148, 0.00205843, 0.00219032, 0.0023268, 0.00246817\}$.

8. ВИСНОВКИ

Проведені дослідження виявили високу ефективність побудованих методів. Запропонована методика дає змогу будувати методи розв'язування багатьох інших задач обчислювальної математики. Числові експерименти підтверджують отримані теоретичні висновки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Алефельд Г.* Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – Москва: Мир, 1987. – 357 с.
2. *Бабушка И.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений / И. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер. – Москва: Мир, 1969. – 368 с.
3. *Добронец Б. С.* Двусторонние численные методы / Б. С. Добронец, В. В. Шайдуров. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение. – 1990. – 208 с.
4. *Калмыков С. А.* Методы интервального анализа / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение. – 1986. – 222 с.
5. *Сеньо П. С.* Арифметика лінійних функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2014. – Вип. 21. – С. 38–57.
6. *Сеньо П. С.* Топологія простору лінійних функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Матем. та комп. моделювання. Серія: фізико-матем. науки. – 2014. – Вип. 11. – С. 209–223.
7. *Сеньо П. С.* Деякі застосування математики функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Матем. та комп. моделювання. Серія: фізико-матем. науки. – 2016. – Вип. 13. – С. 182–193.
8. *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений / С. А. Чаплыгин. – Москва: Гостехиздат, 1950.
9. *Moore R. E.* Practical aspects of interval computation / Moore R. E. // *Aplicase matematikю* – Vol. 13, № 1. – 1968. – P. 52–92.

*Стаття: надійшла до редколегії 16.11.2016
доопрацьована 15.03.2017
прийнята до друку 17.05.2017*

**TWO – SIDED METHODS FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM BASED ON
THE MATHEMATICS OF FUNCTIONAL INTERVALS**

P. Senio

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: petrosny@ukr.net*

In this paper, we present the technique of construction and investigation of two-sided methods for solving the Cauchy problem for ordinary differential equations based on the mathematics of functional intervals [5]. Three methods of this type were build and the algorithms for getting the guaranteed approximation of the unknown problem solution in the form of splines were described. Proposed methods make it possible to construct such approximations with any predetermined width.

Key words: functional interval, interval expansions of a function, differential equation, Cauchy problem, approximation of a function, two-sided approximation, spline.