

НЕЛІНІЙНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ТИПУ УРИСОНА, ЗАЛЕЖНЕ ВІД ТРЬОХ ЧИСЛОВИХ ПАРАМЕТРІВ. ВИПАДОК БІФУРКАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ

Л. Клакович¹, П. Савенко²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000, Україна
e-mail: lesya.klakovych@lnu.edu.ua,

²Інститут прикладних проблем механіки і математики,
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3-б, Львів, 79060, Україна
e-mail: posavenko@gmail.com

Продовжуємо досліджувати проблеми неєдиності розв'язків нелінійного інтегрального рівняння типу Урисона для більш загального випадку, при введенні в підінтегральну функцію трьох числових параметрів. Такі рівняння дають змогу описати більш загальну структуру об'єктів і виникають, зокрема у задачах синтезу випромінюючих систем. Застосування методів розв'язування нелінійних спектральних задач дало змогу отримати рівняння для знаходження множини параметрів, за яких відбувається галуження розв'язків. У підсумку розроблено алгоритми, які зводять задачу до розв'язування задачі Коші, і дають змогу знайти в заданій області множини точок можливої біфуркації розв'язків у вигляді спектральних ліній або поверхонь.

Отримана методика застосована до практичної задачі – дослідження неєдиності розв'язків задачі синтезу випромінювача плоского розкриття за заданою діаграмою напрямленості за потужністю. Основне рівняння синтезу залежить від трьох параметрів, що описують фізичні характеристики системи, і зводиться до розв'язування системи нелінійних інтегральних рівнянь. Задача Коші допомагає знаходити множини точок біфуркації та визначати властивості біфуркуючих розв'язків, що залежать від симетрії діаграми напрямленості. Числові результати демонструють зміни у властивостях власних функцій на різних точках біфуркації, що дає підстави вибирати оптимальні розв'язки, які дають найкраще наближення до заданих діаграм напрямленостей у межах функціонала.

Ключові слова: узагальнене рівняння Урисона, нелінійна трипараметрична спектральна задача, біфуркація розв'язків, числовий приклад.

1. Рівняння Урисона в ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

У зв'язку з розвитком сучасної математичної фізики зріс інтерес до дослідження нелінійних інтегральних рівнянь типу Урисона в прикладних застосуваннях. Зокрема, нелінійні інтегральні рівняння на підставі функції Гріна використовують під час дослідження крайових задач для систем диференціальних рівнянь, залежних від кількох числових параметрів. Огляд основних результатів і фундаментальна теорія галуження розв'язків різних типів нелінійних рівнянь подано в монографії [1]. У тім числі досліджується нелінійне інтегральне рівняння Урисона

$$u(x) \equiv \int_G F(x, y, u(y), \mu) dy, \quad (*)$$

залежне від одного дійсного числового параметра μ , у припущенні, що за деякого значення цього параметра μ_0 , це рівняння має неперервний розв'язок $u_0(x)$. Розглядається задача про знаходження всіх неперервних розв'язків $u_\mu(x)$ рівняння (*) для значень μ близьких до μ_0 , які задовольняють умову

$$\max_{x \in G} |u_\mu(x) - u_0(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow \mu_0.$$

Ми досліджуємо більш загальне рівняння типу Урисона

$$u(x) \equiv \int_G K(x, y, u(y), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) dy, \quad (1)$$

яке на відміну від [1] залежить не від одного, а від трьох числових параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, які дають змогу описувати більш загальну структуру і параметри досліджуваного об'єкта. Ба більше, застосування до такого рівняння методів розв'язування трипараметричних нелінійних спектральних задач дає можливість знайти множину параметрів $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$, за яких відбувається галуження (або біфуркація) розв'язків рівняння (1).

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ, ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Нехай G – обмежена замкнута множина скінченновимірного евклідового простору, I, I_1, I_2, I_3 – проміжки дійсної осі або випуклі області комплексної площини і $K(x, y, u, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – дійсна або комплекснозначна функція, задана на $G \times G \times I \times I_1 \times I_2 \times I_3$ і неперервна по сукупності своїх аргументів. Нехай за деяких значень $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$ рівняння (1) має неперервний розв'язок $u_0(x)$, тобто

$$u_0(x) \equiv \int_G K(x, y, u_0(y), \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}) dy, \quad (2)$$

який надалі називатимемо первинним. Розглянемо задачу про знаходження всіх неперервних розв'язків $u_\lambda(x)$ рівняння (1) для значень $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ близьких до $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$ які при $|\lambda - \lambda^{(0)}| \rightarrow 0$ задовольняють умову

$$\max_{x \in G} |u(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - u_0(x, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)})| \rightarrow 0. \quad (3)$$

Ця умова означає, що треба знайти такі малі неперервні на $\bar{G}$ розв'язки:

$$\omega(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = u(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - u_0(x, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}), \quad (4)$$

які рівномірно збігаються до нуля при

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}. \quad (5)$$

У випадку біфуркації розв'язків в околі точки $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$ первинний розв'язок (2)

$$u_0(x, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}) \equiv 0.$$

Для знаходження малих розв'язків в околі точки $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$ надамо параметрам $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$ малих приростів, тобто приймемо

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(0)} + \mu, \quad \lambda_2 = \lambda_2^{(0)} + \nu, \quad \lambda_3 = \lambda_3^{(0)} + \tau. \quad (6)$$

Шукані розв'язки в околі точки $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)})$ знаходитимемо у вигляді

$$u_\lambda(x, \lambda) = u_0(x, \lambda^{(0)}) + w(x, \mu, \nu, \tau). \quad (7)$$

Підставляючи вирази (6), (7) у рівняння (1) й прийнявши, що підінтегральна функція $K(x, y, u_0(y) + \omega, \lambda_1^{(0)} + \mu, \lambda_2^{(0)} + \nu, \lambda_3^{(0)} + \tau)$ в околі точки $u_0(y), \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$ при $|w| \leq \rho_1, |\mu| \leq \rho_\mu$ і $|\nu| \leq \rho_\nu, |\tau| \leq \rho_\tau$ розкладається у рівномірно збіжний степеневий ряд за функціональним аргументом w й числовими параметрами μ, ν, τ , описується формулою

$$\begin{aligned} & K(x, y, u_0(y) + w, \lambda_1^{(0)} + \mu, \lambda_2^{(0)} + \nu, \lambda_3^{(0)} + \tau) = \\ & = \sum_{m+n+p+q \geq 1} A_{mnpq}(x, y, u_0(y, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)})) w^m \mu^n \nu^p \tau^q, \end{aligned} \quad (8)$$

де $A_{mnpq}(x, y, u_0(y, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)})) = B_{mnpq}(x, y)$ – неперервні по сукупності змінних (x, y) , а ряд збігається рівномірно при $|w| \leq \rho_1, |\mu| \leq \rho_\mu$ і $|\nu| \leq \rho_\nu, |\tau| \leq \rho_\tau$. Підставляючи в рівність (1) вирази (2) і (8), отримуємо

$$u(x) = \sum_{m+n+p+q \geq 1} \mu^n \nu^p \tau^q \int_G B_{mnpq}(x, y, u_0(y)) w^m(y) dy, \quad (9)$$

оскільки $B_{0000} = K(x, y, u_0(y), \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)})$.

Прийнявши

$$B_{1000}(x, y, u_0(y)) = K(x, y, u_0(y), \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}),$$

$$\int_G B_{0100}(x, y, u_0(y)) dy = \alpha_{0100}(x),$$

$$\int_G B_{0010}(x, y, u_0(y)) dy = \alpha_{0010}(x),$$

$$\int_G B_{0001}(x, y, u_0(y)) dy = \alpha_{0001}(x),$$

одержимо

$$\begin{aligned} & u(x) - \int_G K(x, y, u_0(y), \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}) u(y) dy = \\ & = \alpha_{0100}(x) \mu + \alpha_{0010}(x) \nu + \alpha_{0001}(x) \tau + \\ & + \sum_{m+n+p+q \geq 1} \mu^n \nu^p \tau^q \int_B B_{mnpq}(x, y, u_0(y)) w^m(y) dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Отже, сформульована задача зводиться до знаходження всіх неперервних розв'язків $u(x)$ рівняння (10), які збігаються до нуля (в розумінні метрики простору неперервних функцій $C(G)$ при $\mu \rightarrow 0$).

Досліджуючи розв'язки рівняння (10), розглядаємо, аналогічно [1], два випадки: регулярний випадок і випадок галуження. Для визначення першого чи другого випадку досліджуємо рівняння

$$u(x) = \int_G K(x, y, u_0(y), \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}) u(y) dy, \quad (11)$$

одержане з лівої частини рівняння (10).

У випадку, якщо одиниця не є власним значенням оператора

$$Au = \int_G K(x, y, u_0(y), \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}) u(y) dy, \quad (12)$$

визначеного в просторі неперервних функцій $C(G)$, то рівняння (10) має в класі неперервних функцій єдиний малий розв'язок, зображений у вигляді рівномірно (регулярно) збіжного інтегро-степеневого ряду.

У випадку галуження одиниця може бути власним значенням оператора A одиничної кратності, або кратності n ($n > 1$). У першому випадку відбувається одновимірний випадок галуження (біфуркації) розв'язків рівняння (10) і відповідного рівняння (1). У другому випадку рівняння розгалуження може складатись із системи n рівнянь.

Зазначимо, що рівняння (11) є нелінійною трипараметричною спектральною задачею, яку сформулюємо так: нехай оператор-функція $\mathcal{A}(\cdot) : \Lambda \rightarrow \mathcal{L}(E, V)$ визначена у комплексних банахових просторах E і V , а векторний параметр $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ належить до області (відкритої зв'язної множини) Λ комплексного простору $\mathbb{C}^3$, де $\lambda_i \in \Lambda_i \subset \mathbb{C}$. Прийmemo, що кожному λ ставиться у відповідність оператор $A(\lambda) \in \mathcal{L}(E, V)$.

Розглянемо нелінійну трипараметричну спектральну проблему

$$\mathcal{A}(\lambda) x \equiv \mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) x = 0, \quad (13)$$

в якій треба знайти власні значення $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}) \in \Lambda$ і відповідні їм власні вектори $x^{(0)} \in E$ ($x^{(0)} \neq 0$) такі, що $\mathcal{A}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}) x^{(0)} = 0$.

Наведемо, згідно з [2, 3], основні положення побудови обчислювального алгоритму наближеного знаходження множини значень параметрів $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$.

При дискретизації вихідної задачі (13) приймаємо, що, крім просторів E і V , задано відповідні ним банахові простори $\bar{E}_n, \bar{V}_n$ ($n \in \mathbb{N}$), а також система $P = (P_n)$ і $Q = (Q_n)$ лінійних зв'язуючих операторів $P_n : E \rightarrow \bar{E}_n$ та $Q_n : V \rightarrow \bar{V}_n$ таких, що

$$\|P_n x\| \rightarrow \|x\| \quad \text{і} \quad \|Q_n y\| \rightarrow \|y\| \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \forall x \in E, \quad y \in V. \quad (14)$$

Позначення елементів різних просторів подають на діаграмі [5].

$$\begin{array}{ccc} x, x', x^k \text{ і т.д.} & \xrightarrow{A} & y, y', y^k \text{ і т.д.} \\ E & & V \\ \downarrow P_n & & \downarrow Q_n \\ \bar{E}_n & & \bar{V}_n \\ \bar{x}_n, \bar{x}'_n, \bar{x}_n^k \text{ і т.д.} & \xrightarrow{A} & \bar{y}_n, \bar{y}'_n, \bar{y}_n^k \text{ і т.д.} \end{array}$$

Отже, оператор-функція $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ апроксимується, відповідно, наближеними оператор-функціями $\mathcal{A}_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $n \in \mathbb{N}$. У підсумку при кожному $\lambda \in \Lambda$ одержуємо послідовність операторів $A_n \in \mathcal{L}(E_n, V_n)$, яка під час виконання відповідних умов [4] дискретно збігається до оператора $A \in \mathcal{L}(E, V)$.

Внаслідок дискретизації задачі одержуємо послідовність систем лінійних алгебричних рівнянь $T_{jk} = (t_{jk}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))$, $n \in \mathbb{N}$, а задача знаходження власних значень зводиться до знаходження коренів визначника n -го порядку, тобто коренів рівняння

$$\Psi_n \lambda \equiv \det(t_{jk}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))_{j,k=1}^n = 0, n \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Отже, внаслідок дискретизації задачі при $n \in \mathbb{N}$ одержуємо функціональну послідовність визначників $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\}_{n=1}^{\infty}$ від трьох змінних, в яких елементи $t_{ij}^n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ є голоморфними функціями від $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Для обґрунтування збіжності наближених розв'язків (15) до точних розв'язків задачі (13) припускаємо, що для послідовності $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\}_{n=1}^{\infty}$ виконуються такі умови [3].

У м о в а I. При $n \rightarrow \infty$ визначник нескінченного порядку $\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ є збіжним для будь-яких $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda$, тобто виконуються умови теореми Пуанкаре.

У м о в а II. Функціональна послідовність $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\}$ рівномірно збігається на кожній компактній підмножині області Λ .

Отже, з голоморфності послідовності $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\}$ та умов **I**, **II** впливає виконання умов теореми Вейерштрасса [4], яка стверджує, що гранична функція $\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ голоморфна на Λ , а послідовності $\left\{\frac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_k}\right\}$ ($k = 1, 2, 3$) збігаються до $\frac{\partial \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_k}$, відповідно. Ця збіжність рівномірна на кожній компактній підмножині області Λ .

Отже, знаходження наближених розв'язків задачі (13) зводиться до знаходження розв'язків рівняння (15), яке розглядаємо як задачу про знаходження неявно заданої функції, припускаючи для визначеності, що в рівнянні є дві незалежні змінні, зокрема λ_1, λ_2 . Тобто знаходимо функцію $\lambda_3 = \lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)$ чисельними методами.

3. ВИПАДОК ДІЙСНИХ ПАРАМЕТРІВ, УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА ТИПУ КОШІ

Прийматимемо, що спектральні параметри є дійсними величинами й належать до області Λ , розміщеної в початку декартової системи координат XYZ . Почнемо з вивчення однієї функції $F(x, y, z)$, визначеної одним рівнянням

$$F(x, y, z) = 0, \quad (16)$$

припускаючи для визначеності, що є дві незалежних змінних x, y .

Наведемо, згідно з [12], дві важливі теореми стосовно рівняння (16).

Теорема 1. Нехай визначена функція $F(x, y, z)$ задовольняє такі умови:

- 1) неперервна і має неперервну частинну похідну F'_z в околі значень (x_0, y_0, z_0) ;
- 2) $F(x_0, y_0, z_0)$ дорівнює нулю, в той час як $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ відмінна від нуля.

Тоді рівняння (16) має один і тільки один корінь, який прямує до z_0 , якщо x і y прямують до x_0 і y_0 , відповідно.

Розглянемо неявну функцію двох змінних $z(x, y)$, що визначається рівнянням (16). Якщо значення цієї функції розглядати як декартові координати точки у

просторі, то рівняння $F(x, y, z) = 0$ нагадує поверхню у просторі. Прийматимемо, що точка $M_0 = (x_1^{(0)}, y_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ належить до цієї поверхні.

Теорема 2. Якщо кілька функцій незалежного змінного задовольняють співвідношенню $F = 0$, то їхні похідні будуть задовольняти співвідношення, яке вийде, якщо прирівняти до нуля похідну, взятую від лівої частини F , як від складної функції.

Справді, якщо функція F обертається тотожно в нуль, коли замінимо в ній змінні, від яких вона залежить, функціями незалежного змінного, то буде тотожно дорівнюватиме нулю і похідна від функції F . Це твердження залишається правильним і в тому випадку, коли функції, пов'язані співвідношенням $F = 0$, залежать від багатьох незалежних змінних [6].

Оскільки рівність $F(x, y, z) = 0$ є тотожністю, то згідно з теоремою 2, її похідні будуть задовольняти співвідношення, яке вийде, якщо прирівняти до нуля похідну, взятую від лівої частини цієї рівності, як від складної функції при $z = z(x, y)$. Диференціюючи $F(x, y, z) = 0$, знаходимо, що частинні похідні першого порядку визначаються співвідношеннями

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (17)$$

Розв'язуючі ці вирази щодо частинних похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, одержимо систему рівнянь у частинних похідних, яка описує неявно задану поверхню функцією $z = z(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (19)$$

Шукана функція $z = z(x, y)$ у точці $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ повинна задовольняти граничну умову

$$z(x_1, y_1) = z_1. \quad (20)$$

Отже, для знаходження спектральної поверхні $z = z(x, y)$, на підставі неявно заданої функції $F(x, y, z) = 0$ отримано систему рівнянь у частинних похідних (18), (19) за початкової умови (20).

Розв'язувати систему (18), (19) зі спільною початковою умовою (20) можна по-різному. Оскільки шуканий розв'язок в околі точки $M_0 = (x_1^{(0)}, y_2^{(0)}, z_3^{(0)})$ становить гладку поверхню, що проходить через точку M_0 і описується функцією $z = z(x, y)$, то для знаходження точок шуканої поверхні можна застосувати однокрокові методи. Для цього в околі точки введемо локальну систему координат з початком у точці M_0 та побудуємо з відповідними кроками h_1 , h_2 прямокутну сітку (рис. 1). Порядок обчислення значення функції $z = z(x, y)$ у точках сітки схематично зображений стрілками. Один крок під час розв'язування рівняння (18) (при $h_1 > 0$) приводить у сусідню точку справа. Один крок під час розв'язування рівняння (19) (при $h_2 > 0$) приводить у сусідню точку зверху.

Приклад 1. Розглянемо елементарний числовий приклад розв'язування системи рівнянь (18), (19) з початковою умовою (20) для випадку, коли

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\lambda_1^2}{4} + \frac{\lambda_2^2}{4} + \frac{\lambda_3^2}{9} - 1 = 0$$

описує еліпсоїд, а початковою є умова $\lambda_3(0, 0) = \lambda_3^{(0)} = 3$.

Система диференціальних рівнянь для заходження шуканої поверхні набула вигляду

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_1} = -\frac{9\lambda_1}{4\lambda_3}, \quad \frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_2} = -\frac{9\lambda_2}{4\lambda_3}, \quad (21)$$

а початкова умова

$$\lambda_3(0, 0) = \lambda_3^{(0)} = 3. \quad (22)$$

Оскільки функція F описує поверхню обертання, то для її знаходження достатньо розв'язати систему (21) лише в одному з перерізів, зокрема в площині ZOY . Для часткового розв'язування цієї системи застосовували однокрокові методи Ейлера та Рунге – Кутта при двох різних кроках. Результати обчислень зображено на рис. 2 при $h = 0.1$. Крива 2 відображає результати, отримані методом Ейлера, крива 3 – методом Рунге – Кутта, крива 1 відповідає поверхні еліпсоїда. З аналізу рисунка випливають висновки про точність обчислень різними методами.

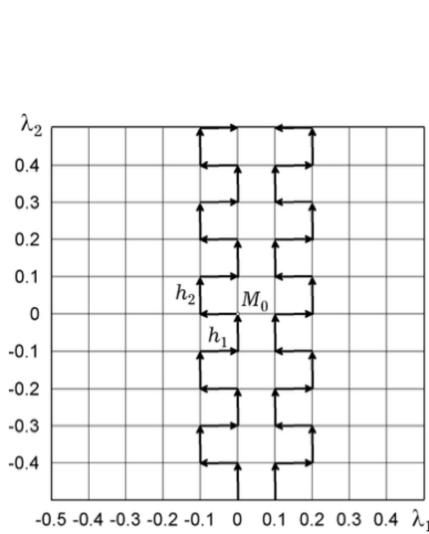


Рис. 1. Прямокутна сітка
Rectangular grid

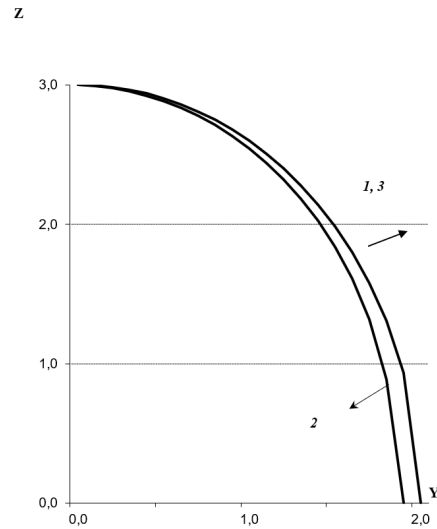


Рис. 2. Результати при $h = 0.1$
Results at $h = 0.1$

4. ЧИСЛОВИЙ ПРИКЛАД

Розглянемо практичне застосування розробленої методики до дослідження проблеми неєдності розв'язків у задачах синтезу випромінюючих систем, зокрема з плоским розкритом за заданою діаграмою напрямленості за потужністю. Опускаючи проміжні викладки, згідно з [7, 8], така задача зводиться до дослідження

проблеми неєдності розв'язків нелінійного рівняння типу Урисона вигляду

$$f = B(C) \equiv \frac{2}{\alpha} \mathbf{A} \mathbf{A}^* (N_0 - |f|^2) \cdot f, \quad (23)$$

залежного від трьох числових параметрів, яке виникає в задачах синтезу плоского випромінюючого розкриву S за заданою діаграмою напрямленості (ДН) за потужністю N_0 .

Введемо безрозмірні параметри, приймаючи, що розкрив S має форму прямокутника $D = \{|\tilde{x}| \leq a_1, |\tilde{y}| \leq a_2\}$, геометричний центр якого збігається з початком системи координат, а сторони паралельні осям OX, OY (детальніше дивись [10]). Прийmemo, що ДН $N_0(s_1, s_2)$ також задана в області $\bar{G}$, що належить деякому прямокутнику, сторони якого паралельні до координатних осей деякої узагальненої системи координат $S_1 S_2 S_3$. Позначимо, відповідно, через γ_1 і γ_2 інтервали зміни кута θ , в яких задана амплітудна ДН $N_0(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ при $\varphi = 0$ і $\varphi = \frac{\pi}{2}$, та виконаємо заміну змінних

$$s_1 = \frac{\tilde{s}_1}{\sin \gamma_1}, \quad s_2 = \frac{\tilde{s}_2}{\sin \gamma_2}; \quad x = \frac{\tilde{x}}{a_1}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{a_2}.$$

Введемо також два основні безрозмірні параметри задачі

$$c_1 = k a_1 \sin \gamma_1, \quad c_2 = k a_2 \sin \gamma_2, \quad (24)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

Прийmemo, що поле в розкриві $U(x, y)$ лінійно поляризоване вздовж однієї з координатних осей. У цьому випадку ДН плоского розкриву має лише одну складову

$$f(s_1, s_2) = AU \equiv \iint_{\bar{S}} U(x, y) e^{i(c_1 x s_1 + c_2 y s_2)} dx dy, \quad (25)$$

де A – лінійний інтегральний оператор, що діє з гільбертового простору $H_U = L_2(\bar{S})$ у простір неперервних комплекснозначних функцій $\mathbf{C}_{(\bar{G})}^{(2)}$, оснащений скалярним добутком

$$(f_1, f_2)_{\mathbf{C}_{(\bar{G})}^{(2)}} = \iint_{\bar{G}} f_1(s_1, s_2) \overline{f_2(s_1, s_2)} ds_1 ds_2, \quad \|f\|_{\mathbf{C}_{(\bar{G})}^{(2)}} = (f, f)_{\mathbf{C}_{(\bar{G})}^{(2)}}^{\frac{1}{2}}. \quad (26)$$

Скалярний добуток у просторі H_U вводимо так:

$$(U_1, U_2)_{L_2(S)} = \frac{4\pi^2}{c_1 c_2} \iint_{\bar{S}} U_1(x, y) \overline{U_2(x, y)} dx dy, \quad \|U\|_{L_2(S)} = (U, U)_{L_2(S)}^{\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Задача синтезу зводиться до мінімізації функціонала вигляду

$$\sigma_{N_\alpha}(U) = \iint_{\bar{G}} [N_0(s_1, s_2) - |f(s_1, s_2)|^2]^2 ds_1 ds_2 + \alpha \iint_{\bar{S}} |U(x, y)|^2 dx dy. \quad (28)$$

З необхідної умови мінімуму функціонала (28), диференціюючи $\sigma_{N_\alpha}(U)$ за Гато й використовуючи рівність (25), одержуємо рівняння щодо синтезованої ДН у просторі $\mathbf{C}_{(\bar{G})}^{(2)}$

$$f = B(f) \equiv \frac{2}{\alpha} \mathbf{A} \mathbf{A}^* (N_0 \cdot f) - \frac{2}{\alpha} \mathbf{A} \mathbf{A}^* (|f|^2 \cdot f). \quad (29)$$

де A^* – спряжений з A оператор. Розгорнута форма цього рівняння має вигляд

$$f(x) = \iint_{\bar{G}} \left(N_0(s'_1, s'_2) - |f(s'_1, s'_2)|^2 \right) \times \\ \times K(s_1, s_2, s'_1, s'_2; c_1, c_2) f(s'_1, s'_2) ds'_1 ds'_2. \quad (30)$$

Якщо область розкриву $\bar{S}$ має дві осі симетрії, а її верхня й нижня межі описуються, відповідно, функціями $y = \pm\eta(x)$ при $x \in [-1, 1]$, то ядро $K(Q, Q', \mathbf{c})$ є дійсним й набуває вигляду

$$K(Q, Q', \mathbf{c}) = \frac{c_1}{2\pi} \int_{-1}^1 \cos c_1 x(s'_1 - s_1) \frac{\sin c_2(s'_2 - s_2)\eta(x)}{\pi(s'_2 - s_2)} dx. \quad (31)$$

У випадку прямокутного розкриву ядро записується так:

$$K(s_1, s_2, s'_1, s'_2; c_1, c_2) = \frac{\sin c_1(s_1 - s'_1)}{\pi(s_1 - s'_1)} \cdot \frac{\sin c_2(s_2 - s'_2)}{\pi(s_2 - s'_2)}. \quad (32)$$

Тут і надалі для скорочення записів використовуємо такі позначення:

$$Q = (s_1, s_2), \quad dQ = ds_1 ds_2, \quad P = (x, y). \quad (33)$$

Оскільки множина значень оператора A є множиною неперервних функцій, що належать до простору $L_2(\bar{G})$, а множина функцій, неперервних на області $\bar{G}$, є щільною у просторі $L_2(\bar{G})$ [9], то розв'язки рівняння (30) будемо досліджувати у комплексному просторі $C(\bar{G})$.

5. РІВНЯННЯ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧОК БІФУРКАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ

Легко переконатись, що при довільних обмежених значеннях параметрів c_1, c_2 рівняння (30) має нульові розв'язки. З ростом параметрів c_1, c_2 відбувається біфуркація розв'язків, тобто за певних значень цих параметрів $c_1^{(k)}, c_2^{(k)}$ з'являються розв'язки, відмінні від нульового.

Прийmemo, що область $\bar{G}$ має дві осі симетрії, а до рівняння (30) застосуємо процес декомплексифікації. Комплексний простір $\mathbf{C}(\bar{G})$ розглядаємо як пряму суму двох дійсних просторів неперервних на області $\bar{G}$ функцій: $\mathbf{C}(\bar{G}) = C(\bar{G}) \oplus C(\bar{G})$, елементи якого подаються у вигляді: $f = (u, v)^T \in \mathbf{C}(\bar{G})$, $u = \text{Re}(f) \in C(\bar{G})$, $v = \text{Im}(f) \in C(\bar{G})$. Норми у цих просторах вводимо за формулами

$$\|u\|_{C(\bar{G})} = \max_{Q \in \bar{G}} |u(Q)|,$$

$$\|v\|_{C(\bar{G})} = \max_{Q \in \bar{G}} |v(Q)|,$$

$$\|f\|_{\mathbf{C}(\bar{G})} = \max \left(\|u\|_{C(\bar{G})}, \|v\|_{C(\bar{G})} \right).$$

В наслідок декомплексифікації рівняння (30) одержуємо еквівалентну йому систему рівнянь у просторах дійсних неперервних функцій

$$\alpha u(Q) = 2 \iint_{\bar{G}} N_0(Q') K(Q, Q'; c_1, c_2) u(Q') dQ' - \\ - 2 \iint_{\bar{G}} K(Q, Q'; c_1, c_2) \left(u^2(Q') + v^2(Q') \right) u(Q') dQ', \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \alpha v(Q) = & 2 \iint_{\bar{G}} N_0(Q') K(Q, Q'; c_1, c_2) v(Q') dQ' - \\ & - 2 \iint_{\bar{G}} K(Q, Q'; c_1, c_2) (u^2(Q') + v^2(Q')) v(Q') dQ'. \end{aligned} \quad (35)$$

Для знаходження множини точок біфуркації розв'язків (у цьому випадку ліній біфуркації) і комплексних розв'язків рівняння (30), які відгалужуються від нульового розв'язку, розглянемо задачу про знаходження такої множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ і всіх відмінних від тривіального розв'язків системи (34), (35), які при $|\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(0)}| \rightarrow 0$ задовольняють умови

$$\max_{Q \in \bar{G}} |u(Q, c)| \rightarrow 0, \quad \max_{Q \in \bar{G}} |v(Q, c)| \rightarrow 0 \quad (36)$$

тобто ці розв'язки рівномірно збігаються до нуля.

Прийнемо

$$c_1 = c_1^{(0)} + \mu, \quad c_2 = c_2^{(0)} + \nu, \quad (37)$$

а шукані розв'язки знаходитимемо у вигляді

$$u(Q, \mathbf{c}) = 0 + w(Q, \mu, \nu), \quad v(Q, \mathbf{c}) = 0 + \omega(Q, \mu, \nu). \quad (38)$$

Надалі, для скорочення записів, залежність функцій $w(Q, \mu, \nu)$, $\omega(Q, \mu, \nu)$ від параметрів μ, ν там, де немає необхідності на цьому наголошувати, будемо опускати.

Підставляючи вирази (37), (38) у систему (34), (35) і розкладаючи підінтегральні функції в околі точки $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, 0, 0)$ у рівномірно збіжні степеневі ряди за функціональними аргументами w, ω й числовими параметрами μ, ν , одержуємо систему нелінійних інтегральних рівнянь типу Ляпунова-Шмідта [1] щодо малих розв'язків w, ω

$$\begin{aligned} w(Q) = & \frac{2}{\alpha} \iint_{\bar{G}} N_0(Q') K(Q, Q'; c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) w(Q') dQ' - \\ & - \frac{2}{\alpha} \sum_{m+n+p+q \geq 2} \mu^p \nu^q \iint_{\bar{G}} A_{mnpq}(Q, Q'; c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) w^m(Q') \omega^n(Q') dQ', \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \omega(Q) = & \frac{2}{\alpha} \iint_{\bar{G}} N_0(Q') K(Q, Q'; c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) \omega(Q') dQ' - \\ & - \frac{2}{\alpha} \sum_{m+n+p+q \geq 2} \mu^p \nu^q \iint_{\bar{G}} B_{mnpq}(Q, Q'; c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) w^m(Q') \omega^n(Q') dQ', \end{aligned} \quad (40)$$

де $A_{mnpq}(Q, Q'; c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$, $B_{mnpq}(Q, Q'; c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ – коефіцієнти розкладу підінтегральних функцій, неперервно залежні від своїх аргументів.

Згідно з теорією галуження розв'язків [1] точки біфуркації розв'язків визначаються з лінійної частини системи рівнянь (39), (40), тобто для знаходження множини точок біфуркації маємо систему лінійних однорідних двовимірних інтегральних рівнянь

$$\phi(Q) = \frac{2}{\alpha} \iint_{\bar{G}} N_0(Q') K(Q, Q'; c_1, c_2) \phi(Q') dQ', \quad (41)$$

$$\psi(Q) = \frac{2}{\alpha} \iint_{\bar{G}} N_0(Q') K(Q, Q'; c_1, c_2) \psi(Q') dQ', \quad (42)$$

в якій спектральними параметрами є параметр α та параметри $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \mathbf{c}$, що входять нелінійно в ядра інтегральних операторів.

У загальному випадку, при фіксованому значенні параметра α , знаходження власних значень і власних функцій системи рівнянь (41), (42) є нелінійною дво-параметричною спектральною задачею [2, 3]. Зазначимо, що ця система не взаємозв'язана щодо функцій $\phi(Q')$ та $\psi(Q')$ і ядра у цих рівняннях збігаються, то, очевидно, що збігаються і їхні розв'язки. Тому задача про знаходження власних значень і власних функцій системи рівнянь (41), (42) зводиться до розв'язування одного з них, яке з урахуванням уже прийнятих раніше записів для спектральних задач подамо у вигляді

$$\phi(Q) = T(\mathbf{c})\phi \equiv \frac{2}{\alpha} \iint_{\bar{G}} N_0(Q') K(Q, Q', c_1, c_2) \phi(Q') dQ'. \quad (43)$$

6. АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ МНОЖИНИ ТОЧОК БІФУРКАЦІЇ

Розглянемо нелінійну двопараметричну спектральну задачу, що відповідає рівнянню (43), на операторному рівні. Нехай

$$(c_1, c_2) \in \Lambda_c, \quad \Lambda_c = \Lambda_{c_1} \times \Lambda_{c_2}, \quad \text{де} \quad \Lambda_{c_i} = \{c_i \in \Lambda_{c_i} : 0 < c_i < r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Нелінійну двопараметричну спектральну задачу стосовно рівняння (43) запишемо в операторній формі

$$\mathcal{A}(c_1, c_2)\phi = (T(c_1, c_2) - I)\phi = 0, \quad (44)$$

де I – одиничний оператор у просторі $C(\bar{G})$. Треба знайти власні значення $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) \in \Lambda_c$ і відповідні їм власні вектори $(0) \in E(\phi^{(0)} \neq 0)$ такі, що $\mathcal{A}(c_1^{(0)}, c_2^{(0)})^{(0)} = 0$.

Оскільки ядро

$$\mathcal{A}(s_1, s_2, s'_1, s'_2; c_1, c_2) = N_0(s'_1, s'_2) K(s_1, s_2, s'_1, s'_2; c_1, c_2) \quad (45)$$

у рівнянні (43) неперервне за сукупністю своїх аргументів, то звідси випливає, що $T(\mathbf{c})$ є оператором Фредгольма з нульовим індексом [4]. Ба більше, він є цілком неперервним оператором у просторі $L_2(\Omega)$ [9].

Функції, що входять в ядро інтегрального оператора (43), допускають аналітичне продовження в комплексну область Λ_c , якщо c_1, c_2 вважати комплексними параметрами. Голоморфність оператор-функції $\mathcal{A}(c_1, c_2) = T(c_1, c_2) - I$ випливає [4] з диференційовності інтегрального оператора $T(c_1, c_2)$ за параметрами c_1, c_2 . Зокрема, існування частинних похідних $\partial \mathcal{A}(c_1, c_2) / \partial c_i$ ($i = 1, 2$) у довільній точці $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) \in \Lambda_c$ випливає з неперервності ядра $K(Q, Q', \mathbf{c})$ за сукупністю своїх змінних в області $\bar{G} \times \bar{G} \times \bar{\Lambda}_c$ та існування й неперервності в $\bar{G} \times \bar{G} \times \bar{\Lambda}_c$ частинних похідних $\frac{\partial K(c_1, c_2)}{\partial c_i}$ ($i = 1, 2$), у чому легко переконатись.

Для знаходження розв'язків задачі (44) методом неявної функції будемо розглядати також допоміжну нелінійну однопараметричну спектральну задачу, приймаючи, зокрема в (44) $c_2 = \beta c_1$

$$\phi(Q) = \tilde{T}(c_1)u \equiv \frac{2}{\alpha} \iint_{\bar{G}} N_0(Q') \tilde{K}(Q, Q', c_1) \phi(Q') dQ', \quad (46)$$

де $\tilde{K}(Q, Q', c_1) = K(Q, Q', c_1, \beta c_1)$. Операторна форма цього рівняння набула вигляду

$$\mathcal{A}_\beta(c_1)\phi = (\tilde{T}(c_1) - I)\phi = 0. \quad (47)$$

Спектр оператор-функції (47) позначимо через $s(\mathcal{A}_\beta)$.

Оскільки $\tilde{T}(c_1)$ є звуженням оператора $T(\mathbf{c})$, то звідси випливає, що $\tilde{T}(c_1)$ – фредгольмів оператор з нульовим індексом за будь-якого $c_1 \in \Lambda_{c_1}$, а оператор-функція $\mathcal{A}_\beta(\cdot) \equiv (\tilde{T}(\cdot) - I) : \Lambda_{c_1} \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$, де $E = C(\bar{G})$, є голоморфною.

Для побудови чисельних алгоритмів застосовуємо до рівняння (43) кубатурну формулу [5]. У підсумку одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь розмірності $m = n^2$

$$u_{kl} = T_{M_n}(c_1, c_2) \mathbf{u} \equiv \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{K}(Q_{kl}, Q_{ij}, c_1, c_2) u_{ij} \quad (k, l = 1 \div n) \quad (48)$$

щодо вектора $\mathbf{u}_m = \{u_{11}, \dots, u_{1n}, u_{21}, \dots, u_{2n}, \dots, u_{n1}, \dots, u_{nn}\}^T$.

Відзначимо, що матриця $T_{M_n}(c_1, c_2)$ системи (48) є чотиривимірною. Для застосування відомих методів лінійної алгебри при знаходженні розв'язків системи (48) матрицю $T_{M_n}(c_1, c_2)$ зводимо відповідно до двовимірної.

Для того, щоб система (48) мала відмінні від тотожного нуля розв'язки, треба, щоб параметри c_1, c_2 були розв'язками рівняння

$$\Psi_n(c_1, c_2) = \det T_{M_n}(c_1, c_2) - I_m = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (49)$$

де I_m – одинична матриця розмірності $m = n^2$.

Внаслідок дискретизації рівняння (46) одержуємо однорідну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$u_{kl} = \tilde{T}_{M_n}(c_1) \mathbf{u} \equiv \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n a_j \tilde{\mathcal{K}}(Q_{kl}, Q_{ij}, c_1) u_{ij}, \quad (k, l = 1 \div n). \quad (50)$$

Ця система має відмінні від тотожного нуля розв'язки, якщо параметр c_1 є розв'язком рівняння

$$\tilde{\Psi}_n(c_1) = \det \tilde{T}_{M_n}(c_1, \beta c_1) - I_m = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (51)$$

Для знаходження розв'язків рівняння (49) застосовуємо метод неявної функції, розв'язуючи чисельно задачу Коші

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\partial \Psi_n(c_1, c_2) / \partial c_1}{\partial \Psi_n(c_1, c_2) / \partial c_2}, \quad (52)$$

$$c_2(c_1^{(\nu)}) = c_2^{(\nu)}. \quad (53)$$

Для знаходження початкової умови розв'язуємо нелінійну однопараметричну задачу (47) на промені $c_2 = \beta c_1$, знаходячи корені рівняння (51).

Отже, розв'язуючи задачу Коші (52), (53), одержуємо множину точок біфуркації розв'язків системи рівнянь (39), (40). Оскільки коефіцієнти матриці в системі лінійних алгебричних рівнянь (48) є аналітичними функціями від параметрів c_1, c_2 ,

то розв'язками задачі Коші (52), (53) є гладкі криві, які описують зв'язні компоненти спектра рівняння (43).

Розглянемо числові результати знаходження множини точок біфуркації рівняння (43) за заданої рівномірної ДН за потужністю $N_0(s_1, s_2) \equiv 1$. На рис. 3 наведено результати розв'язування допоміжної однопараметричної нелінійної спектральної задачі на променях $c_2 = \beta c_1$ при різних значеннях β шляхом розв'язування рівняння (51). Ці результати використовують як початкові умови (53) в задачі Коші для знаходження спектральних ліній. Перші спектральні лінії рівняння (43), що становлять собою множини точок біфуркації розв'язків рівняння при $\alpha = 0.1$, зображено на рис. 4.

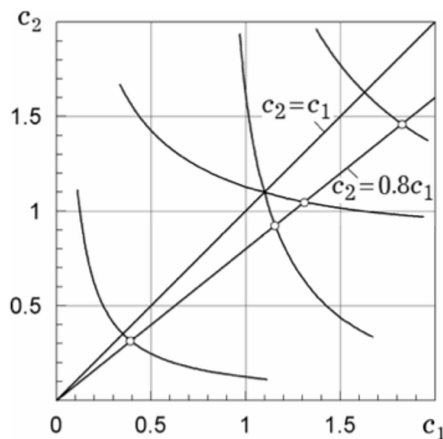


Рис. 3. Допоміжна задача
Auxiliary task

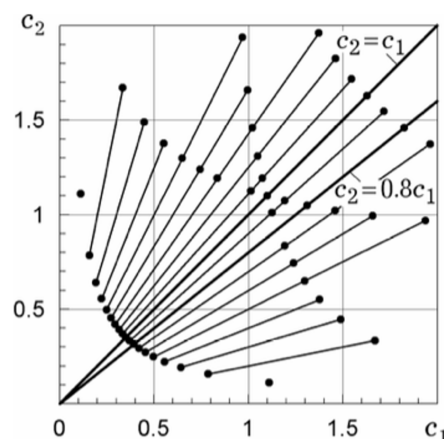


Рис. 4. Множини точок біфуркації
Sets of bifurcation points

На рис. 5 зображено нормовані (за евклідовою нормою) власні функції рівняння (43), які відповідають першим чотирьом точкам біфуркації, що належать променю $c_2 = 0.8c_1$, при $N_0(s_1, s_2) \equiv 1$. Зауважимо [8], що власні функції цього рівняння використовують для побудови біфуркуючих розв'язків системи нелінійних інтегральних рівнянь (34), (35), що відгалужуються від нульового й описують у першому наближенні їхні властивості. Властивості біфуркуючих розв'язків значною мірою залежать від властивостей симетрії (парності) заданої ДН $N_0(s_1, s_2)$ та властивостей власних функцій.

Із аналізу рисунків бачимо, що власні функції, наведені у різних точках біфуркації, мають різні властивості. Зокрема, власна функція у першій точці біфуркації $c_1 = 0.3927$, $c_2 = 0.3142$ (рис. 5, а) є парною за обома аргументами. Власна функція у точці $c_1 = 1.1554$, $c_2 = 0.9243$ (рис. 5, б) є парною по s_1 і непарною по s_2 . У третій точці $c_1 = 1.3102$, $c_2 = 1.0482$ навпаки – власна функція непарна по s_1 і парна по s_2 (рис. 5, в). У точці $c_1 = 1.8260$, $c_2 = 1.4608$ власна функція непарна по s_1 і непарна по s_2 (рис. 5, г).

Отже, у кожній з наведених точок біфуркації від нульового розв'язку можуть відгалужуватись ненульові розв'язки з різними властивостями.

Зауважимо, що розв'язки лінійного однорідного інтегрального рівняння (43) залежать від параметра регуляризації α . Ці розв'язки – лінії, належні до області

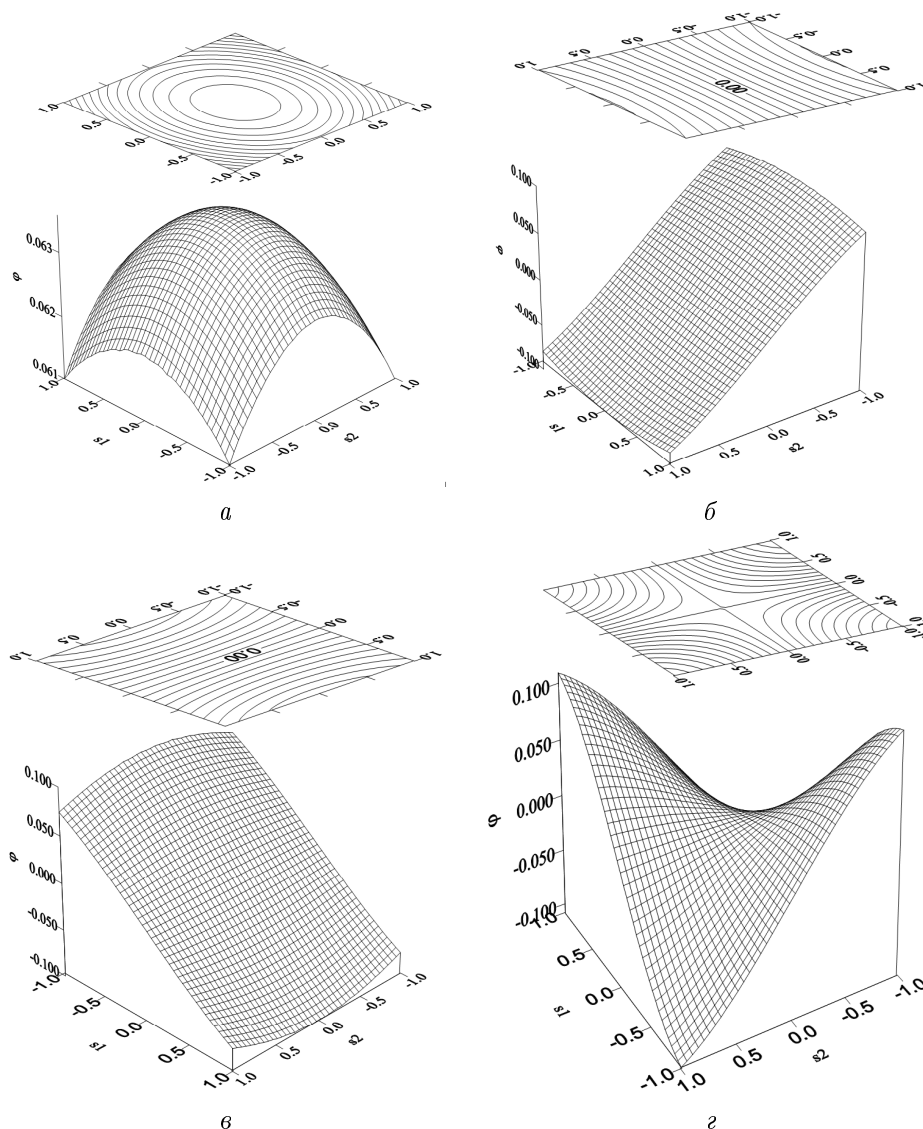


Рис. 5. Власні функції рівняння (44) у перших точках біфуркації
The eigenfunctions of equation (44) at the first bifurcation points

Λ_c , у точках яких від нульового відгалужуються нетривіальні розв'язки відповідного типу основного рівняння синтезу (31). Перше галуження розв'язків на промені $c_2 = \beta c_1$ відбувається у точці перетину $(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$ першої спектральної лінії (найближчої до початку системи координат) з цим променем. При $c_1 \leq c_1^{(0)}$ відмінних від нульового розв'язків рівняння (30) на промені $c_2 = \beta c_1$ не існує.

Оскільки рівняння (43) залежить від параметра α , то, відповідно, від цього

параметра залежить множина його власних значень – спектральні лінії. Розглянемо залежність ліній біфуркації розв'язків рівняння (43) від параметра α , яка зображена товстими лініями на рис. 6. З аналізу цього рисунка випливає, що чим менше значення параметра α , то тим ближче перша лінія біфуркації наближається до початку системи координат. Отже, відмінні від тотожного нуля розв'язки задачі синтезу (30) за дуже малих значень параметрів (c_1, c_2) можуть існувати лише при $\alpha \rightarrow 0$.

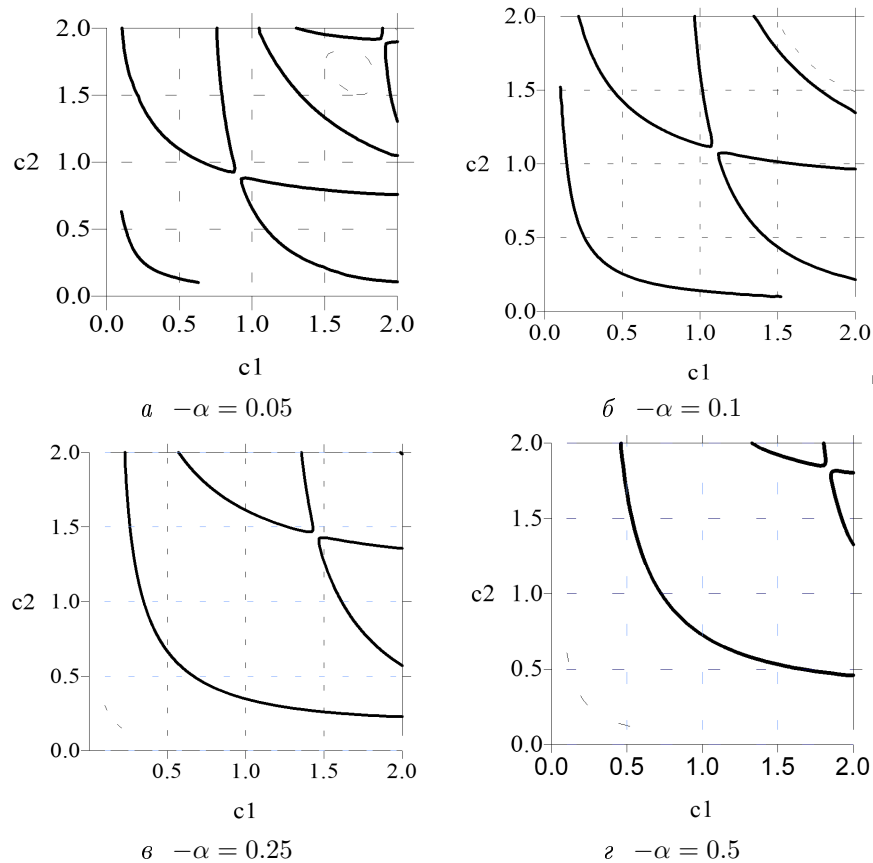


Рис. 6. Залежність ліній біфуркації розв'язків рівняння (43) від параметра α
Dependence of the bifurcation lines of the solutions of equation (43) on the parameter α

7. ЧИСЕЛЬНЕ ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Чисельне знаходження розв'язків задачі синтезу за заданою ДН за потужністю у випадку лінійної поляризації поля у розкритті відбувається на підставі рівняння (30), яке подамо у формі

$$\begin{cases} u = B_1(u, v) \equiv \frac{2}{\alpha} AA^* (N_0 \cdot u) - \frac{2}{\alpha} AA^* ((u^2 + v^2) u), \\ v = B_2(u, v) \equiv \frac{2}{\alpha} AA^* (N_0 \cdot v) - \frac{2}{\alpha} AA^* ((u^2 + v^2) v), \end{cases} \quad (54)$$

де через $(B_1, B_2)^T = \mathbf{B}$ позначено оператор основного рівняння синтезу (30), а $(u, v)^T = f$.

Знаходження одного з розв'язків системи рівнянь (54) виконуємо, застосовуючи такий ітераційний процес:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + (1 - \tau) \begin{pmatrix} B_1(u_n, v_n) \\ B_2(u_n, v_n) \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (55)$$

де τ – деяке фіксоване число з проміжку $(0, 1)$.

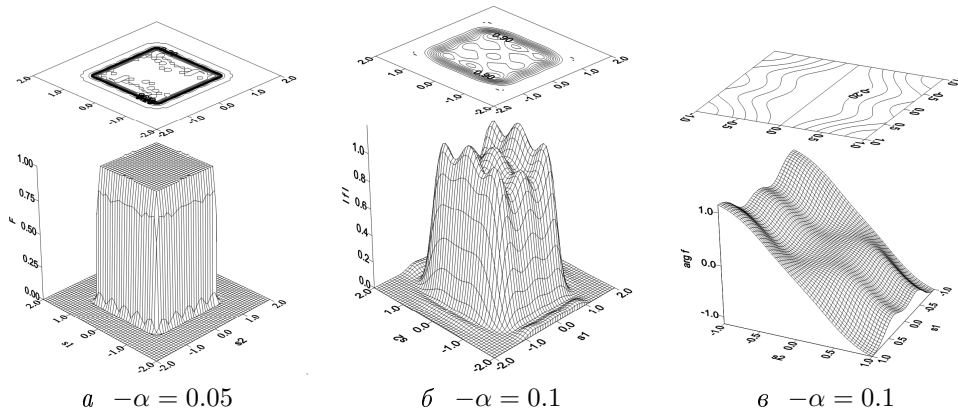


Рис. 7. Синтез ДН за потужністю

Synthesis of DN by power

При визначенні умов та обґрунтуванні збіжності ітераційного процесу (55) застосуємо теорему [13]:

Теорема 3. Нехай нерозтягуючий оператор U перетворює замкнену опуклу множину ω строго опуклого банахового простору X у свою компактну частину.

Тоді за будь-якого $x_0 \in \omega$ послідовні наближення

$$x_{n+1} = \tau x_n + (1 - \tau)U(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

де τ – деяке фіксоване число з проміжку $(0, 1)$, збігаються до деякого розв'язку рівняння $x = U(x)$.

Як зазначалося вище, розв'язки системи рівнянь належать до простору неперервних функцій $C_{(\bar{G})}^{(2)}$, оснащеного скалярним добутком. Цей простір допускає поповнення, яке збігається з гільбертовим простором $L_2(\bar{G})$. Ба більше, множина неперервних на області $\bar{G}$ функцій є щільною у просторі $L_2(\bar{G})$. Тому систему рівнянь (54) можна досліджувати у просторі $L_2(\bar{G})$.

Оскільки простір $H_f = L_2(\bar{G})$ є банаховим строго опуклим простором, то для виконання умов теореми 3 стосовно системи рівнянь (54) достатньо продемонструвати, що у просторі H_f існує замкнена опукла множина S_{r_0} , на якій оператор $\mathbf{B}(f)$ є нерозтягуючим і цілком неперервним, де справджується співвідношення $\mathbf{B}(S_{r_0}) \subset S_{r_0}$.

Опускаючи проміжні викладки, наведемо, згідно з [7, 8], приклад синтезу заданої ДН за потужністю. На рис. 7 зображено задану ДН (а) й синтезовану ДН

за потужністю (6) та відповідну їй фазову ДН (6). Із аналізу цього рисунка бачимо, що фазова ДН парна за аргументом s_1 й непарна по s_2 . Отже, фазова ДН за властивостями парності корелює з властивостями парності власної функції, зображеної на рис. 7 б, що відповідає другій точці біфуркації.

На підставі формули

$$U_*(x, y) = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint_{\Omega} \left(N_0(s_1, s_2) - |f_*(s_1, s_2)|^2 \right) \times \\ \times f_*(s_1, s_2) e^{-i(c_1 x' s_1 + c_2 y' s_2)} ds_1 ds_2 \quad (56)$$

переконаємось, що оптимальний АФР поля у розкритті, що відповідає розв'язку цього типу, є несиметричним щодо осі ОУ. Отже, симетрична ДН за потужністю може бути створена несиметричним розподілом поля в розкритті.

8. ВИСНОВКИ

Уведення в інтегральний оператор Урисона додаткових числових параметрів дає змогу в практичних застосуваннях дослідити проблему неєдиності існуючих розв'язків та їх властивості зі зміною величини параметрів у заданій області.

Всі особливості наведеного алгоритму наближеного знаходження зв'язних компонент спектра при $m = 3$ без особливих труднощів з використанням результатів [14] переносяться на випадок багатопараметричних спектральних задач при $m > 3$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Vainberg M.M. Theory of branching of solutions of non-linear equations. Translated by Israel Program for Scientific Translations. Monographs and Textbooks on Pure and Applied Mathematics / M. M. Vainberg, V. A. Trenogin. – Leyden, The Netherlands: Noordhoff International Publishing. XXVI, 1974. – 485 p. Dfl. 112.00.
2. Процах Л. П., Савенко П. О. Методи неявних функцій при розв'язуванні двопараметричних лінійних спектральних задач / Л. П. Процах, П. О. Савенко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – Т. 52, № 2. – С. 42–49.
3. Савенко П. О. Метод неявних функцій при розв'язуванні багатопараметричних нелінійних спектральних задач / П. О. Савенко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – Т. 63, № 2. – С. 36–50.
4. Herve M. Several complex variables. Local Theory / M. Herve. – Bombay: Oxford Univ. Press, 1963. – 134 p.
5. Vainikko G.M. Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. / G.M. Vainikko. – Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1976. – 136 p.
6. Goursat E. A Course In Mathematical Analysis. Vol I. / Edouard Goursat. – Translated by O. Dunkel and E.R. Hedrick. – Ginn and Company, 1904. [https:// archive. org/details/-coursemathanalys01gourrich](https://archive.org/details/coursemathanalys01gourrich)
7. Савенко П. О. Синтез випромінюючих систем з плоским розкритвом за заданою діаграмою напрямленості за потужністю. І. Знаходження множини точок біфуркації / П. О. Савенко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, № 4. – С. 83–95.
8. Савенко П. О. Синтез випромінюючих систем з плоским розкритвом за заданою діаграмою напрямленості за потужністю. ІІ. Знаходження розв'язків у точках біфуркації. / П. О. Савенко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2014. – Т. 57, № 2. – С. 14–27.
9. Trenogin V. Analyse fonctionnelle / Vladilen Trenogin. – Éds. Mir, 1985. – 528 p.
10. Савенко П. О. Дослідження галуження розв'язків задач синтезу випромінюючих систем з плоским розкритвом за заданою амплітудною діаграмою напрямленості / П. О. Са-

- венко, М.Д. Ткач // Матем. методи та фізико-механічні поля. – 2017. – Т. 60, № 2. – С. 14–31. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/MMPPhMP_2017_60_2_4
11. Савенко П.О. Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем з плоским розкритом / П.О. Савенко. – Львів: ІППММ НАН України, 2013.
 12. Savenko P.O. Theory of Nonlinear Synthesis of Radiating Systems / P.O. Savenko, L.M. Klakovich, M.D. Tkach. – LAP AMBERT Academic Publishing, 2016.
 13. Krasnosel'skii M.A. Approximated Solutions of Operator Equations / M.A. Krasnosel'skii, G.M. Vainikko, P.P. Zabreiko, Ja.B. Rutitski, V.Ja. Stecenko. – Walters – Noordhoff, Groningen, 1972. – 484 p.
 14. Kolmogorov A.N. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis / A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin. – Martino Fine Books, 2012. – 278 p.

Стаття: надійшла до редколегії 10.10.2024

доопрацьована 23.10.2024

прийнята до друку 14.11.2024

THE NONLINEAR INTEGRAL EQUATION OF THE URISOHN TYPE DEPENDENT ON THREE NUMERICAL PARAMETERS: THE CASE OF SOLUTION BIFURCATION

L. Klakovich¹, P. Savenko²

¹*Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: lesya.klakovich@lnu.edu.ua,*

²*Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics
them. Ya. S. Pidstrigacha,
3b, Naukova str, Lviv, 79060, Ukraine
e-mail: posavenko@gmail.com*

This paper continues the study of the non-uniqueness problem of solutions to a nonlinear integral equation of the Urysohn type in a more general case, by introducing three numerical parameters into the integrand function. Such equations allow for the description of a more general structure of objects and arise, in particular, in problems of synthesizing radiating systems. The application of methods for solving nonlinear spectral problems made it possible to derive equations for determining the set of parameters at which solution branching occurs. As a result, algorithms have been developed that reduce the problem to solving a Cauchy problem, enabling the identification of a set of possible bifurcation points of the solutions within a given domain in the form of spectral lines or surfaces.

The proposed method has been applied to a practical problem – the study of the non-uniqueness of solutions in the synthesis of a flat aperture radiator with a given power radiation pattern. The main synthesis equation depends on three parameters that describe the physical characteristics of the system and is reduced to solving a system of nonlinear integral equations. The Cauchy problem allows finding the set of bifurcation points and determining the properties of bifurcating solutions, depending on the symmetry of the radiation pattern. Numerical results demonstrate changes in the properties of eigenfunctions at various bifurcation points, which makes it possible to choose optimal solutions that provide the best approximation to the given radiation patterns within the functional.

Key words: generalized Urysohn equation, nonlinear three-parameter spectral problem, bifurcation of solutions, numerical example.