ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 517.95 *doi: 10.30970/vam.2023.31.00000*

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ БЕЗ УМОВ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

М. Бокало[1], Т. Бокало[1], О. Доманська[1], Н. Бугрій[2]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com,
tbokalo@gmail.com, olena.domanska@avenga.com,
[2] *Національний університет "Львівська політехніка",*
вул. Митрополита Андрея 5, корпус 4, Львів, 79013
e-mail: nataliia.v.buhrii@lpnu.ua

Досліджено мішану (початково-крайову) задачу з неоднорідними крайовими умовами для нелінійних параболічних систем зі змінними показниками нелінійності в необмежених за просторовими змінними областях. У цьому випадку не накладається жодних обмежень на поведінку розв'язку і зростання вхідних даних на нескінченності. Доведено існування, єдиність і неперервну залежність від вхідних даних узагальнених розв'язків таких задач, використовуючи узагальнені простори Лебега та Соболєва. Отримано апріорні оцінки узагальнених розв'язків досліджуваних задач.

Ключові слова: мішана задача, нелінійна параболічна система, змінний показник нелінійності, необмежена область, узагальнений простір Лебега.

1. Вступ

Як добре відомо, мішані або, іншими словами, початково-крайові задачі для лінійних параболічних рівнянь і систем в необмежених за просторовими змінними областях є коректними, якщо на їхні розв'язки та вхідні дані додатково накладені певні обмеження на їх зростання на нескінченності [15, 18]. Подібні результати визначені і для нелінійних параболічних рівнянь з широких класів [7]. Проте існують нелінійні параболічні рівняння та системи, мішані задачі для яких однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності [1–4, 6, 8, 17].

Уточнимо сказане на прикладі задачі

$$u_t - u_{xx} + |u|^{p-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q := (0,+\infty) \times (0,T],$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,T], \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in [0,+\infty),$$

де $p \geqslant 2$, $T > 0$ – які-небудь фіксовані сталі, $f : Q \to \mathbb{R}$, $u_0 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ – задані функції, $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ – невідома функція.

У [15] було доведено, що класичний розв'язок цієї задача для лінійного рівняння, тобто у випадку $p = 2$, єдиний за додаткової умови на його поведінку на нескінченності вигляду: $|u(x,t)| \leqslant A e^{a|x|^2}$, $(x,t) \in \overline{Q}$, де a, A – залежні від u сталі. Також було з'ясовано, що ця умова є суттєвою, а точніше, було доведено, що ця задача у лінійному випадку ($p = 2$) з $f \equiv 0, u_0 \equiv 0$ має нетривіальні розв'язки зі зростанням $Ae^{a|x|^{2+\varepsilon}}$ при $|x| \to +\infty$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Зауважимо, що таке обмеження на поведінку розв'язку можна інтерпретувати як аналог крайової умови на нескінченності. У цій праці з'ясовано, що для існування класичного розв'язку сформульованої вище задачі для лінійного рівняння потрібно, крім умов на гладкість вхідних даних, накласти певні обмеження щодо їхньої поведінки при $|x| \to +\infty$, а саме: $|f(x,t)| + |u_0(x)| \leqslant B\, e^{b|x|^2}$, $x \in (0,+\infty)$, $t \in (0,T]$, де b, B – які-небудь сталі.

Але в [8] (вперше) довели, що у випадку, коли $p > 2$ і $f : Q \to \mathbb{R}$ – будь-яка вимірна функція така, що її звуження на множину $Q_R := (0,R) \times (0,T]$ належить простору $L^{p'}(Q_R)$ для будь-якого $R > 0$, де p' – спряжене до p, тобто $1/p + 1/p' = 1$, сформульована вище задача має тільки один узагальнений розв'язок, який є класичним за певної гладкості правих частин.

Ми розглядаємо новий клас нелінійних параболічних систем, для яких правильні результати стосовно коректності мішаної задачі подібні до тих, що є в [8]. Рівняння в цих системах мають змінні показники нелінійності і для їх дослідження використовуються узагальнення простору Лебега [10]. Такого типу рівняння активно досліджували в багатьох працях [5, 9, 11–14]. Це пов'язано з тим, що рівняння зі змінними показниками нелінійності виникають при математичному моделюванні різних типів фізичних процесів і, зокрема, описують потоки електрореологічних речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у кондукторі під впливом змінного температурного поля [14]. Отримані тут результати є узагальненням і доповненням результатів [4], в якій розглядаються нелінійні параболічні системи зі сталими показниками нелінійності.

Стаття складається з п'яти розділів. У другому розділі введено основні позначення та допоміжні факти. Формулювання задачі та основного результату містить третій розділ. У четвертому розділі наведено допоміжні твердження. У п'ятому розділі обґрунтовано основний результат.

2. Основні позначення та поняття

Нехай n, N – які-небудь натуральні числа. Під $\mathbb{R}^k$, де $k = n$ або $k = N$, розумітимемо лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $y = (y_1, \ldots, y_k)^\top$ дійсних чисел у вигляді вектор-стовпчиків і наділений скалярним добутком $(y,z) := \sum\limits_{i=1}^{k} y_i z_i$ і нормою $|y| := \big(\sum\limits_{i=1}^{k} |y_i|^2\big)^{1/2}$. Під $\mathbb{R}^{N\times n}$ розумітимемо лінійний простір дійсних матриць $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$, де $\eta^k = (\eta_1^k, \ldots, \eta_N^k)^\top \in \mathbb{R}^N, k = \overline{1,n}$, з нормою $|\eta| := \big(\sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{k=1}^{n} |\eta_i^k|^2\big)^{1/2}$.

Нехай Ω – необмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\Gamma := \partial\Omega$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $0 \in \Omega$ і для довільного $R > 0$ позначимо через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$ таку, що $0 \in \Omega_R$. Приймемо $\Gamma_R := \Gamma \cap \partial\,\Omega_R$ для будь-якого $R > 0$.

Розглянемо лінійний простір $C^1(\overline{\Omega})$ (складений з неперервних на $\overline{\Omega}$ і неперервно-диференційовних в Ω функцій, похідні першого порядку яких мають неперервне продовження на $\overline{\Omega}$) і його підпростір $C^1_{\rm c}(\overline{\Omega})$, елементами якого є функції з носіями, що є компактами в $\overline{\Omega}$, та підпростір $C^1_{\rm c}(\Omega)$, елементами якого є функції з носіями, що є компактами в Ω. Очевидно, що $C^1_{\rm c}(\Omega) \subset C^1_{\rm c}(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega})$.

Для будь-якого $q \in [1, \infty]$ позначимо

$$L^q_{\rm loc}(\overline{\Omega}) = \{v(x), x \in \Omega \, : \, v|_{\Omega_R} \in L^q(\Omega_R) \ \forall R > 0\}.$$

Тут і далі під $v|_{\Omega_R}$ розумітимемо звуження функції $v(x), x \in \Omega$ на множину Ω_R.

Для довільного $R > 0$ під $H^1(\Omega_R)$ розумітимемо простір Соболєва визначений на Ω_R функцій, тобто $H^1(\Omega_R) := \{v \in L^2(\Omega) \, : \, v_{x_j} \in L^2(\Omega), \, j = \overline{1, n}\}$, з нормою

$$\|v\|_{H^1(\Omega_R)} := \left(\int\limits_{\Omega_R} \left[|\nabla v(x)|^2 + |v(x)|^2 \right] dx \right)^{1/2},$$

де тут і далі $\nabla v(x) = (v_{x_1}(x), \ldots, v_{x_n}(x))$, $x \in \Omega$, – градієнт функції v. Приймемо

$$H^1_{\rm loc}(\overline{\Omega}) := \{v \in L^2_{\rm loc}(\overline{\Omega}) \, : \, v_{x_j} \in L^2_{\rm loc}(\overline{\Omega}), \, j = \overline{1, n}\}$$

і на цьому просторі введемо систему півнорм за правилом: $\big\{\|v\|_{H^1(\Omega_R)} \, : \, R > 0\big\}$. Ця система півнорм задає топологію локально опуклого простору і за нею він є повним. Замикання простору $C^1_{\rm c}(\Omega)$ в $H^1_{\rm loc}(\overline{\Omega})$ позначатимемо через $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm loc}(\overline{\Omega})$. Очевидно, що збіжність послідовності $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $H^1_{\rm loc}(\overline{\Omega})$ (відповідно, в $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm loc}(\overline{\Omega})$) означає існування елемента $v \in H^1_{\rm loc}(\overline{\Omega})$ (відповідно, $v \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rm loc}(\overline{\Omega})$) такого, що $\|v_k - v\|_{H^1(\Omega_R)} \to 0$ при $k \to \infty$ для кожного $R > 0$.

Під $\overset{\circ}{H}{}^1_R(\Omega)$, де $R > 0$ – будь-яке, розумітимемо замикання в просторі $H^1_{\rm loc}(\overline{\Omega})$ його підпростору $\{v \in C^1_c(\Omega) \, : \, \operatorname{supp} v \subset \Omega_R\}$. Очевидно, що простір $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm loc}(\overline{\Omega})$ є індуктивною границею сім'ї просторів $\{\overset{\circ}{H}{}^1_R(\Omega) \, : \, R > 0\}$. Приймемо $\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm c}(\Omega) := \bigcup\limits_{R>0} \overset{\circ}{H}{}^1_R(\Omega)$. Через $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_R)$ позначимо простір, складений зі звужень елементів простору $\overset{\circ}{H}{}^1_R(\Omega)$ на область Ω_R, тобто замикання в $H^1(\Omega_R)$ простору

$$C^1_c(\Omega_R) := \{v \in C^1(\Omega_R) \, : \, \operatorname{supp} v \text{ – компакт в } \Omega_R\}.$$

Нехай $T \in \mathbb{R}$ – яке-небудь число. Позначимо

$$Q := \Omega \times (0, T), \quad \Sigma := \Gamma \times (0, T);$$

$$Q_R := \Omega_R \times (0, T), \quad \Sigma_R = \Gamma_R \times (0, T), \quad R > 0.$$

Для довільного $R > 0$ введемо простори

$$H^{1,0}(Q_R) := \{w \in L^2(Q_R) \, : \, w_{x_j} \in L^2(Q_R), \, j = \overline{1, n}\}$$

з нормою

$$\|w\|_{H^{1,0}(Q_R)} := \left(\int\limits_{\Omega_R} \left[\, |\nabla w(x,t)|^2 + |w(x,t)|^2 \right] dxdt \right)^{1/2};$$

$$H^{1,0}_0(Q_R) := \{w \in H^{1,0}(Q_R) \, : \, w(\cdot, t) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_R) \quad \text{для м. в.} \ \ t \in (0, T)\},$$

а також простори

$$L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) = \{v(x,t), (x,t) \in Q \,:\, v|_{Q_R} \in L^q(Q_R) \;\; \forall R > 0\}, \quad q \in [1,\infty];$$

$$H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) = \{v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \,:\, v_{x_j} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\; j = \overline{1,n}\};$$

$$H^{1,0}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) = \{v \in H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \,:\, v(\cdot,t) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \quad \text{для м. в.} \;\; t \in (0,T)\}.$$

У просторах $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і $H^{1,0}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ визначаємо збіжність послідовностей так само, як в $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ чи $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, тобто послідовність елементів простору $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ чи $H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ (відповідно, $H^{1,0}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$) збіжна в $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ чи $H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ (відповідно, в $H^{1,0}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$), якщо для кожного $R > 0$ послідовність звужень на Q_R членів заданої послідовності є збіжною, відповідно, в $L^q(Q_R)$ та $H^{1,0}(Q_R)$. Простори $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\; H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\; H^{1,0}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ є повними локально опуклими просторами.

Приймемо

$$C([0,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) = \{v : Q \to \mathbb{R} \,:\, t \mapsto v(\cdot,t)|_{\Omega_R} \in C([0,T];\, L_2(\Omega_R)) \;\forall\, R > 0\}.$$

Скажемо, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ збіжна до v в $C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, якщо для кожного $R > 0$ послідовність $\{v_k|_{Q_R}\}$ збіжна до $v|_{Q_R}$ в $C([0,T]; L^2(\Omega_R))$.

Нехай D – довільна область в $\mathbb{R}^n$, $r \in L^\infty(D)$ – яка-небудь функція така, що $r(x) \geq 1$ для майже всіх $x \in D$, причому якщо $r(x) > 1$ для майже всіх $x \in D$, то $r'(x)$, $x \in D$, – функція, яка визначена рівністю $\dfrac{1}{r(x)} + \dfrac{1}{r'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in D$. Нехай $L^{r(\cdot)}(D)$ – лінійний простір (класів) вимірних функцій $v : D \to \mathbb{R}$, для яких функціонал $\rho_{r,D}(v) := \displaystyle\int\limits_D |v(x)|^{r(x)}\, dx$ набуває скінчених значень, з нормою

$$\|v\|_{L^{r(\cdot)}(D)} := \inf\{\lambda > 0 \,:\, \rho_{r,D}(v/\lambda) \leq 1\}.$$

Цей простір називають *узагальненим простором Лебега* або *простором Лебега зі змінним показником підсумовування* (див., наприклад, [10]). Зазначимо таке: якщо $r(x) = r = \mathrm{const} \geq 1$ для майже всіх $x \in D$, то $L^{r(\cdot)}(D) = L^r(D)$ і $\|\cdot\|_{L^{r(\cdot)}(D)} = \|\cdot\|_{L^r(D)}$. Відомо, що коли $1 < \operatorname{ess\,inf}_{x\in D} r(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x\in D} r(x) < \infty$, то спряжений до $L^{r(\cdot)}(D)$ простір можна ототожнити з простором $L^{r'(\cdot)}(D)$. Якщо $G := D \times (0,T)$, то простір $L^{r(\cdot)}(G)$ визначаємо подібно до $L^{r(\cdot)}(D)$ з функціоналом

$$\rho_{r,G}(w) := \iint\limits_G |w(x,t)|^{r(x)}\, dxdt$$

замість $\rho_{r,D}(v)$.

Нехай $p \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, причому $p(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in Q$. Для кожного $R > 0$ приймемо $\rho_{p,R}(w) := \rho_{p,Q_R}(w)$. Нехай

$$L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) = \big\{w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) : w|_{Q_R} \in L^{p(\cdot)}(Q_R) \;\; \forall\, R > 0\big\}.$$

На просторі $L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ вводиться топологія, за якою збіжність послідовностей його елементів визначається так само, як в $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Позначимо через $C^1_c(0,T)$ лінійний простір неперервно диференційовних функцій, які визначені на інтервалі $(0,T)$ і носії яких є компактами на цьому інтервалі.

3. Формулювання задачі та основного результату

Нехай X – деяка множина. Через $[X]^N$ позначатимемо декартів степінь множини X з показником N: $[X]^N := \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{N\text{-разів}}$, елементи якого записуватимемо у вигляді вектор-стовпчиків. Якщо X – лінійний топологічний (відповідно, нормований) простір, то на $[X]^N$ природно вводиться лінійна структура та топологія (відповідно, норма).

Позначимо

$$\mathbb{P} := \{p \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega) \, : \, \operatorname{ess} \inf_{x \in \Omega_R} p(x) > 1 \ \forall R > 0\}.$$

Очевидно, що коли $p \in \mathbb{P}$, то $p' \in \mathbb{P}$, де $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Нехай $p \in \mathbb{P}$. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину впорядкованих наборів $(a^0, a^1, \ldots, a^n) =:(a^j)$ з $n+1$ визначених на $Q \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n}$ зі значеннями в $\mathbb{R}^N$ вектор-функцій

$$a^j(x,t,\xi,\eta) := (a^j_1(x,t,\xi,\eta), ..., a^j_N(x,t,\xi,\eta))^\top,$$

$$(x,t,\xi,\eta) \in Q \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n}, \ j = \overline{0,n},$$

які задовольняють такі умови:

1) для кожного $j \in \{0,1,...,n\}$ вектор-функція $a^j : Q \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}^N$є каратеодорівською, тобто для будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N$ і $\eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ вектор-функція $a^j(\cdot,\xi,\eta) : Q \to \mathbb{R}^N$ – вимірна за Лебегом та для майже всіх $(x,t) \in Q$ вектор-функція $a^j(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}^N$ – неперервна;

2) для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N, \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ виконуються нерівності

$$|a^0_i(x,t,\xi,\eta)| \leqslant h^0_{i,1}(x,t)(|\xi|^{p(x)-1} + |\eta|^{2/p'(x)}) + h^0_{i,2}(x,t), \quad i = \overline{1,N},$$

$$|a^j_i(x,t,\xi,\eta)| \leqslant h^j_{i,1}(x,t)(|\xi| + |\eta|) + h^j_{i,2}(x,t), \quad i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,n},$$

де $h^j_{i,1} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{0,n}$; $h^0_{i,2} \in L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$; $h^j_{i,2} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,n}$.

Нехай $\mathbb{F}_p$ – множина, елементами якої є впорядковані набори $(f^0, f^1, \ldots, f^n) =: (f^j)$ з $n+1$ визначених на Q вектор-функцій зі значеннями в $\mathbb{R}^N$ (тобто $f^j = (f^j_1, \ldots, f^j_N)^\top$, де $f^j_i : Q \to \mathbb{R}^N$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{0,n}$), які задовольняють умову: $f^0_i \in L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $f^j_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,n}$, тобто $\mathbb{F}_p := L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \times \big[L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})\big]^{N-1}$.

Приймемо

$$\Phi_p := \{\varphi \in [H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N : \varphi_t \in [L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N\}.$$

Будемо говорити, що послідовність $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty \subset \Phi_p$ збігається до φ в Φ_p, якщо $\varphi^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ в $[H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N$ і $\varphi^k_t \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_t$ в $[L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N$. Очевидно, що коли $\varphi \in \Phi_p$, то $\varphi(\cdot,0) \in [L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})]^N$.

Нехай $\mathbb{V} := [L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))]^N$. Скажемо, що послідовність $\{u^{0,k}\}_{k=1}^\infty$ збігається до u^0 в $\mathbb{V}$, якщо $u^{0,k}_i \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u^0_i$ в $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ для кожного $i \in \{1,\ldots,N\}$.

Позначимо

$$\mathbb{U}_p := [H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))]^N.$$

А тепер сформулюємо *задачу*, яку далі будемо досліджувати.

Нехай $p \in \mathbb{P}$ і $(a^0, a^1, \ldots, a^n) =: (a^j) \in \mathbb{A}_p$, $(f^0, f^1, \ldots, f^n) =: (f^j) \in \mathbb{F}_p$, $\varphi \in \Phi_p$, $u^0 \in \mathbb{V}$ – довільно задані. Будемо шукати функцію $u = (u_1, \ldots, u_N)^\top \in \mathbb{U}_p$, яка задовольняє (в певному сенсі) систему рівнянь

$$\begin{aligned} u_{i,t} - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_i^j(x,t,u,\nabla u) + a_i^0(x,t,u,\nabla u) = \\ = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f_i^j(x,t) + f_i^0(x,t), \quad (x,t) \in Q, \end{aligned} \tag{1}$$

$i = \overline{1,N}$, крайову умову

$$u_i = \varphi_i \quad \text{на} \ \ \Sigma, \quad i = \overline{1,N},$$

та початкову умову

$$u_i = u_i^0 \quad \text{на} \ \ \overline{\Omega}, \quad i = \overline{1,N},$$

або те саме, але у векторній формі,

$$u_t - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a^j(x,t,u,\nabla u) + a^0(x,t,u,\nabla u) = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f^j(x,t) + f^0(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2}$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \ \ \Sigma \tag{3}$$

та початкову умову

$$u = u^0 \quad \text{на} \ \ \overline{\Omega}. \tag{4}$$

Це є мішана задача або, іншими словами, початково-крайова задача для систем рівнянь вигляду (1). Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (1) – (4).

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі* (1) – (4) *називають функцію* $u \in \mathbb{U}_p$ *таку, що* $u - \varphi \in H^{1,0}_{0,loc}(\overline{Q})$ *і виконується умова* (4) *та рівність*

$$\iint\limits_Q \big[-(u,\psi)\omega' + \big\{ \sum_{j=1}^n (a^j(x,t,u,\nabla u), \psi_{x_j}) + (a^0(x,t,u,\nabla u), \psi) \big\} \omega \big] \, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \big\{ \sum_{j=1}^n (f^j, \psi_{x_j}) + (f^0, \psi) \big\} \omega \, dxdt \tag{5}$$

для будь-яких $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1_c(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$ *і* $\omega \in C^1_c(0,T)$.

Множину узагальнених розв'язків задачі (1) – (4) для заданих $(a^j) \in \mathbb{A}_p$, $(f^j) \in \mathbb{F}_p$, $\varphi \in \Phi_p$, $u^0 \in \mathbb{V}$ позначатимемо через $SPF((a^j),(f^j),\varphi,u^0)$.

Означення 2. *Нехай* $\widetilde{\mathbb{A}_p} \subset \mathbb{A}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}_p} \subset \mathbb{F}_p$, $\widetilde{\Phi_p} \subset \Phi_p$, $\widetilde{\mathbb{V}} \subset \mathbb{V}$.

Скажемо, що задача (1) – (4) *є* ***однозначно розв'язною*** *на просторі* $\widetilde{\mathbb{A}_p} \times \widetilde{\mathbb{F}_p} \times \widetilde{\Phi_p} \times \widetilde{\mathbb{V}}$, *якщо для будь-яких* $(a^j) \in \widetilde{\mathbb{A}_p}$, $(f^j) \in \widetilde{\mathbb{F}_p}$, $\varphi \in \widetilde{\Phi_p}$, $u^0 \in \widetilde{\mathbb{V}}$ *множина* $SPF((a^j),(f^j),\varphi,u^0)$ *складається з одного елемента.*

Вважатимемо, що задача (1) – (4) *є* ***коректною*** *на просторі* $\widetilde{\mathbb{A}_p} \times \widetilde{\mathbb{F}_p} \times \widetilde{\Phi_p} \times \widetilde{\mathbb{V}}$, *якщо вона є однозначно розв'язна на цьому просторі і для довільних послідовностей* $\{(a^{j,k})\}_{k=1}^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}_p}$, $\{(f^{j,k})\}_{k=1}^\infty \subset \widetilde{\mathbb{F}_p}$, $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty \subset \widetilde{\Phi_p}$, $\{u^{0,k}\}_{k=1}^\infty \subset \widetilde{\mathbb{V}}$ *таких, що*

$(a^{j,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a^j)$ *в* $\widetilde{\mathbb{A}_p}$, $(f^{j,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (f^j)$ *в* $\widetilde{\mathbb{F}_p}$, $\varphi^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ *в* $\widetilde{\Phi_p}$, $u^{0,k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u^0$ *в* $\widetilde{\mathbb{V}}$, *маємо* $u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ *в* $\mathbb{U}_p$, *де* $u^k \in SPF((a^{j,k}),(f^{j,k}),\varphi^k,u^{0,k})$, $k\in\mathbb{N}$, $\quad u\in SPF((a^j),(f^j),\varphi,u^0)$.

Окреслимо точніше проблему, яку розглядаємо. Як уже згадувалося вище, існують нелінійні параболічні рівняння, для яких мішана задача в необмежених областях має єдиний узагальнений розв'язок. Нас буде цікавити питання про поширення цього результату на випадок системи рівнянь, тобто шукатимемо множину $\mathbb{P}^*\subset\mathbb{P}$ і топологічні простори $\widetilde{\mathbb{A}_p}, \widetilde{\mathbb{F}_p}, \widetilde{\Phi_p}, \widetilde{\mathbb{V}}$, де $p\in\mathbb{P}^*$ такі, що задача (1) – (4) на просторі $\widetilde{\mathbb{A}_p}\times\widetilde{\mathbb{F}_p}\times\widetilde{\Phi_p}\times\widetilde{\mathbb{V}}$ коректна для кожного $p\in\mathbb{P}^*$.

Враховуючи сказане стосовно часткового випадку нашої задачі, можна висунути гіпотезу, що множина $\mathbb{P}^*$ складається з елементів $\mathbb{P}$ таких, що

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x) =: p^- > 2, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) =: p^+ < \infty,$$

і для кожного $p\in\mathbb{P}^*$ множина $\mathbb{A}_p^*$ має елементами набори функцій $(a^j)\in\mathbb{A}_p$, які задовольняють умови:

3) існує (залежна від (a^j)) стала $B>0$ така, що для кожного $j=\overline{1,n}$, майже всіх $(x,t)\in Q$ і будь-яких ξ, $\widetilde{\xi}$ з $\mathbb{R}^N$ та η, $\widetilde{\eta}$ з $\mathbb{R}^{N\times n}$ виконується нерівність

$$|a^j(x,t,\xi,\eta)-a^j(x,t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})| \leqslant B(|\xi-\widetilde{\xi}|+|\eta-\widetilde{\eta}|);$$

4) існують (залежні від (a^j)) сталі $K_1>0$, $K_2\geqslant 0$, $K_3>0$ такі, що для майже всіх $(x,t)\in Q$ та будь-яких ξ, $\widetilde{\xi}$ з $\mathbb{R}^N$ та η, $\widetilde{\eta}$ з $\mathbb{R}^{N\times n}$ виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^n (a^j(x,t,\xi,\eta)-a^j(x,t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}),\eta^j-\widetilde{\eta}^j) + (a^0(x,t,\xi,\eta)-a^0(x,t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}),\xi-\widetilde{\xi}) \geqslant$$

$$\geqslant K_1|\eta-\widetilde{\eta}|^2 + K_2|\xi-\widetilde{\xi}|^2 + K_3|\xi-\widetilde{\xi}|^{p(x)},$$

причому, якщо $n>1$ і $p^+\geqslant \dfrac{2n}{n-1}$, то (обов'язково) $K_2>0$.

Скажемо, що послідовність $\{(a^{j,k})\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{A}_p^*$ збіжна до (a^j) в $\mathbb{A}_p^*$, де $p\in\mathbb{P}^*$, якщо елементи $(a^{j,k})$, $k\in\mathbb{N}$, і елемент (a^j) задовольняють умови **3**) і **4**) з тими самими сталими B, K_1, K_2, K_3 і для кожного $R>0$ маємо

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{ess} \sup_{(x,t)\in Q_R}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N,\eta\in\mathbb{R}^{N\times n}} \Big(\frac{|a^{0,k}(x,t,\xi,\eta)-a^0(x,t,\xi,\eta)|}{|\xi|^{p(x)-1}+|\eta|^{2/p'(x)}+1} +$$

$$+\sum_{j=1}^n \frac{|a^{j,k}(x,t,\xi,\eta)-a^j(x,t,\xi,\eta)|}{|\xi|+|\eta|+1}\Big)=0.$$

Позначимо через $\mathbb{A}_p^{**}$ підмножину множини $\mathbb{A}_p^*$, яка складається з елементів $(a^j)\in\mathbb{A}_p^*$, які задовольняють додаткову умову:

5) для майже всіх $(x,t)\in Q$ і довільних $\xi,\widetilde{\xi}\in\mathbb{R}^N$, $\eta,\widetilde{\eta}\in\mathbb{R}^{N\times n}$ виконується нерівність

$$|a^0(x,t,\xi,\eta)-a^0(x,t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})| \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{h}_0(x,t)\Big(\big(|\eta|+|\widetilde{\eta}|\big)^{(p(x)-2)/p(x)}|\eta-\widetilde{\eta}| + \big(|\xi|+|\widetilde{\xi}|\big)^{p(x)-2}|\xi-\widetilde{\xi}|\Big),$$

де $\widetilde{h}_0\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Далі для спрощення записів використовуємо позначення

$$a^j(v)(x,t) := a^j(x,t,v(x,t),\nabla v(x,t)), \quad (x,t)\in Q, \quad j=\overline{0,n}.$$

Основним результатом цієї праці є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $p\in\mathbb{P}^*$. Тоді правильні такі твердження.*

1°. *Задача* (1) – (4) *є однозначно розв'язною на просторі $\mathbb{A}_p^*\times\mathbb{F}_p\times\Phi_p\times\mathbb{V}$ і для будь-яких $(a^j)\in\mathbb{A}_p^*, (f^j)\in\mathbb{F}_p,\ \varphi\in\Phi_p, u^0\in\mathbb{V}$ функція $u\in SPF((a^j),(f^j),\varphi,u^0)$ має оцінку*

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}}|u(x,t)|^2\,dx+\iint\limits_{Q_{R_0}}\big[|\nabla u|^2+K_2|u|^2+|u|^{p(x)}\big]\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s\Big\{C_1R^{n-\frac{q}{q-2}}+C_2\iint\limits_{Q_R}\big[\sum_{j=1}^n|f^j-a^j(\varphi)|^2+$$

$$+|f^0-a^0(\varphi)-\varphi_t|^{p'(x)}\big]\,dxdt+C_3\int\limits_{\Omega_R}|u^0(x)-\varphi(x,0))|^2\,dx\Big\}+$$

$$+C_4\iint\limits_{Q_{R_0}}\big[|\nabla\varphi|^2+K_2|\varphi|^2+|\varphi|^{p(x)}\big]\,dxdt+C_5\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}}|\varphi(x,t)|^2\,dx, \qquad (6)$$

*де R_0,R – довільні сталі такі, що $0<R_0<R$, $R\geqslant1$, а $q=p^+$, якщо $K_2=0$, і $q\in(2,p^-]\cup\{p^+\}$ при $K_2>0$; $s>\max\left\{\dfrac{2p^-}{p^--2},\dfrac{2q}{q-2}\right\}$ – довільне фіксоване число; C_1, C_2, C_3, C_4 C_5 – додатні сталі, які залежать тільки від B, K_1, K_2, K_3 (з умов **3**) і **4**)), p^-, p^+, n, q, s.*

2°. *Задача* (1) – (4) *є коректною на просторі $\mathbb{A}_p^*\times\mathbb{F}_p\times\{0\}\times\mathbb{V}$ і і для будь-яких $(a^j)\in\mathbb{A}_p^*$, $(f^j)\in\mathbb{F}_p$, $u^0\in\mathbb{V}$ функція $u\in SPF((a^j),(f^j),0,u^0)$ має оцінку (6) з $\varphi=0$.*

3°. *Задача* (1) – (4) *є коректною на просторі $\mathbb{A}_p^{**}\times\mathbb{F}_p\times\Phi_p\times\mathbb{V}$ і для будь-яких $(a^j)\in\mathbb{A}_p^*,(f^j)\in\mathbb{F}_p$, $\varphi\in\Phi_p$, $u^0\in\mathbb{V}$ функція $u\in SPF((a^j),(f^j),\varphi,u^0)$ має оцінку (6).*

Зауваження 1. *Прикладом системи* (1), *для якої правильне твердження **3**° теореми 1 (див. [6]), є рівняння*

$$u_t-\sum_{j=1}^n\big(\widehat{a}^j(x,t)u_{x_j}\big)_{x_j}+\widehat{a}^0(x,t)|u|^{p(x)-2}u=f(x,t), \quad (x,t)\in Q,$$

де $p\in\mathbb{P}^*$, $\widehat{a}^j\in L^\infty(Q)$, $\operatorname*{ess\,inf}_Q\widehat{a}^j>0$, $j=\overline{0,n}$, причому, якщо $n>1$, то $p^+<\dfrac{2n}{n-1}$.

4. Допоміжні твердження

Наведемо потрібні для доведення теореми деякі допоміжні твердження.

Лема 2 ([16]). *Нехай вектор-функції* $v \in [L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^{p(\cdot)}_{loc}(\overline{Q})]^N$, $g^0 \in [L^{p'(\cdot)}_{loc}(\overline{Q})]^N$, $g^j \in [L^2_{loc}(\overline{Q})]^N$, $j=\overline{1,n}$ *такі, що*

$$\iint\limits_Q \big[-(v,\psi)\omega' + \{ \sum_{j=1}^n (g^j, \psi_{x_j}) + (g^0,\psi) \}\omega \big]\, dxdt = 0 \tag{7}$$

для будь-яких $\omega \in C^1_c(0,T)$, $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1_c(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$, $supp\,\psi \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, *де* $R_* > 1$ – *яке-небудь фіксоване число.*

Тоді $v \in [C([0,T];L^2(\Omega_R))]^N$ *для кожного* $R \in (0,R_*)$, *і для довільних функцій* $\theta \in C^1[0,T]$, $w \in C^1_c(\overline{\Omega})$, $supp\, w \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, *та будь-яких* t_0, t_1 *таких, що* $0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant T$, *правильна рівність*

$$\theta(t_1)\int\limits_\Omega |v(x,t_1)|^2 w(x)\,dx - \theta(t_0)\int\limits_\Omega |v(x,t_0)|^2 w(x)\,dx - \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_\Omega |v(x,t)|^2 w(x)\theta'(t)\,dxdt +$$

$$+2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_\Omega \big[\sum_{j=1}^n (g^j,(vw)_{x_j}) + (g^0, vw)\big]\theta\,dxdt = 0. \tag{8}$$

Крім того, якщо $v(x,t)=0$ *для майже всіх* $(x,t) \in Q \setminus Q_{R_*}$, *то* $v \in C([0,T];L^2(\Omega))$ *і в рівності* (8) *можна взяти* $w=1$.

Лема 3. *Нехай* $p \in \mathbb{P}^*$, $(a^j) \in \mathbb{A}^*_p$ *і для кожного* $l \in \{1,2\}$ *функції* $(f^{j,l}) \in \mathbb{F}_p$, $u^{0,l} \in \mathbb{V}$ *та* $u^l \in \mathbb{U}_p$ *такі, що* $u^1 - u^2 \in [H^{1,0}_0(Q_{R_*})]^N$ *і*

$$\iint\limits_{Q_{R_*}} \big[-(u^l,\psi)\omega' + \{ \sum_{j=1}^n (a^j(x,t,u^l,\nabla u^l), \psi_{x_j}) + (a^0(x,t,u^l,\nabla u^l),\psi) \}\omega \big]\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_{R_*}} \{ \sum_{j=1}^n (f^{j,l},\psi_{x_j}) + (f^{0,l},\psi)\}\omega\, dxdt \tag{9}$$

для будь-яких $\omega \in C^1_c(0,T)$, $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1_c(\Omega)) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$ *таких, що* $supp\ \psi \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, *де* $R_* \geqslant 1$ – *деяке число.*

Тоді для будь-яких чисел R_0, R *таких, що* $0 < R_0 < R \leqslant R_*$, $R \geqslant 1$, *правильна нерівність*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u^1(x,t) - u^2(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \big[|\nabla u^1 - \nabla u^2|^2 + K_2|u^1-u^2|^2 +$$

$$+|u^1-u^2|^{p(x)}\big]\,dxdt \leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s \big[C_1 R^{n-\frac{q}{q-2}} +$$

$$+C_2 \iint\limits_{Q_R} \big\{ \sum_{j=1}^n |f^{j,1} - f^{j,2}|^2 + |f^{\,0,1} - f^{\,0,2}|^{p'(x)} \big\}\,dxdt + C_3 \int\limits_{\Omega_R} |u^{0,1}-u^{0,2}|^2\,dx \big], \tag{10}$$

*де q і s такі ж, як в теоремі 1, C_1, C_2 і C_3 – деякі сталі, які залежать тільки від B, K_1, K_2, K_3 (з умов **3)** і **4)**), q, s, p^-, p^+, n.*

Доведення. Приймемо $v := u^1 - u^2$. З інтегральних тотожностей, отриманих з (9) по черзі для $l \in \{1, 2\}$, маємо

$$\iint\limits_{Q_{R_*}} \Big[- (v, \psi)\omega' + \{ \sum_{j=1}^{n} (a^j(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^j(x,t,u^2,\nabla u^2), \psi_{x_j}) + (a^0(x,t,u^1,\nabla u^1) -$$

$$-a^0(x,t,u^2,\nabla u^2), \psi)\}\omega\Big]\, dxdt = \iint\limits_{Q_{R_*}} \{\sum_{j=1}^{n} (f^{j,1} - f^{j,2}, \psi_{x_j}) + (f^{0,l} - f^{0,2}, \psi)\}\omega\, dxdt \quad (11)$$

для будь-яких $\omega \in C^1_{\mathrm{c}}(0,T)$ і $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1_c(\overline{\Omega})) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$ таких, що $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega_{R_*}}$.

З (11) за лемою 2 одержимо

$$\theta(t_1) \int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t_1)|^2 w(x)\, dx - \theta(t_0) \int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t_0)|^2 w(x)\, dx - \iint\limits_{Q_{R_*}} |v|^2 w \theta'\, dxdt +$$

$$+2 \iint\limits_{Q_{R_*}} \{\sum_{j=1}^{n} (a^j(u^1) - a^j(u^2), (vw)_{x_j}) + (a^0(u^1) - a^0(u^2), vw)\}\theta(t)\, dxdt =$$

$$= 2 \iint\limits_{Q_{R_*}} \{\sum_{j=1}^{n} (f^{j,1} - f^{j,2}, (vw)_{x_j}) + (f^{0,1} - f^{0,2}, vw)\}\, \theta\, dxdt, \quad (12)$$

де $\theta \in C^1([0,T])$, $w \in C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, $0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant T$ – довільні.

Нехай R_0, R – будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \leqslant R_*$, $R \geqslant 1$. Приймемо $\zeta(x) = (R^2 - |x|^2)/R$, якщо $|x| \leqslant R$, і $\zeta(x) = 0$, коли $|x| > R$. Візьмемо в (12) $t_0 = 0$, $t_1 = \tau \in (0,T]$, $\theta = 1$, $w = \zeta^s$, де $s > 0$ – достатньо велике число (його значення уточнимо пізніше; очевидно, що при $s > 1$ маємо $\zeta^s \in C^1(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp}\zeta^s \subset \overline{\Omega_R}$). У підсумку матимемо рівність

$$\int\limits_{\Omega_R} |v(x,\tau)|^2\, \zeta^s(x)\, dx + 2 \iint\limits_{Q_R^\tau} \{\sum_{j=1}^{n} (a^j(u^1) - a^j(u^2), (v\zeta^s)_{x_j}) + (a^0(u^1) - a^0(u^2), v\zeta^s)\}\, dxdt =$$

$$+2 \iint\limits_{Q_R^\tau} \{\sum_{j=1}^{n} (f^{j,1} - f^{j,2}, (v\zeta^s)_{x_j}) + (f^{0,1} - f^{0,2}, v\zeta^s)\}\, dxdt + \int\limits_{\Omega_R} |v(x,0)|^2\, \zeta^s(x)\, dx,$$

де

$$Q_R^\tau := \Omega_R \times (0,\tau), \quad \tau \in (0,T].$$

Звідси, міркуючи так, як у відповідному місці [16], одержимо

$$\int\limits_{\Omega_R} |v(x,\tau)|^2\, \zeta^s\, dx + \iint\limits_{Q_R^\tau} \big[K_1 |\nabla v|^2 + K_2 |v|^2 + K_3 |v|^{p(x)}\big]\, \zeta^s\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^{s - \frac{kq}{q-2}}\, dxdt + C_7 \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{j=1}^{n} \{|f^{j,1} - f^{j,2}|^2 + |f^{0,1} - f^{0,2}|^{p'(x)}\}\, \zeta^s\, dxdt -$$

$$-\int\limits_{\Omega_R} |u^{0,1}-u^{0,2}|^2\,\zeta^s\,dx, \quad k=1,2, \tag{13}$$

де C_6, C_7 – додатні сталі, які залежать тільки від p^-, p^+, q, n, r, s, B, K_1, K_2, K_3.

Враховуючи, що $R \geqslant 1$, $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant R$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, причому $R-R_0 \leqslant \zeta(x)$, коли $|x| \leqslant R_0$, та вибравши $s > 2p_-/(p_- - 2)$, з (13) після відповідних перетворень і оцінок отримуємо (10). □

5. Обґрунтування основного результату

Спочатку доведемо *існування узагальненого розв'язку* задачі (1) – (4) на просторі $\mathbb{A}_p^* \times \mathbb{F}_p \times \Phi_p \times \mathbb{V}$, де $p \in \mathbb{P}^*$ – яке-небудь. Нехай $(a^j) \in \mathbb{A}_p^*$, $(f^j) \in \mathbb{F}_p$, $\varphi \in \Phi_p$ та $u^0 \in \mathbb{V}$. Виберемо послідовності $\{\varphi^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{(f^{j,k})\}_{k=1}^{\infty}$, $\{u^{0,k}\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що $\varphi^k \in \Phi_p$, $(f^{j,k}) \in \mathbb{F}_p$, $u^{0,k} \in \mathbb{V}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ і $\varphi^k(x,t) = \varphi(x,t)$, $f^{j,k}(x,t) = f^j(x,t)$, $j=\overline{1,n}$, для майже всіх $(x,t) \in Q_{k-3/4}$, та $\varphi^k(x,t)=0$, $f^{j,k}(x,t)=0$, $j=\overline{1,n}$, для $(x,t) \in Q \setminus Q_{k-1/2}$, $u^{0,k}(x) = u(x)$, $x \in \Omega_{k-3/4}$, і $u^{0,k}(x)=0$, $x \in \Omega \setminus \Omega_{k-1/2}$.

Нехай $k \in \mathbb{N}$ – довільне фіксоване число. Розглянемо допоміжну задачу: знайти функцію $u^k \in [H^{1,0}(Q_k) \cap L^{p(\cdot)}(Q_k) \cap C([0,T];L^2(\Omega_k))]^N$ таку, що $u^k - \varphi^k \in [H_0^{1,0}(Q_k)]^N$, $u^k|_{t=0} = u^{0,k}(x)$, $x \in \Omega_k$, і правильна рівність

$$\iint\limits_{Q_k} \big[-(u^k,\psi)\omega' + \big\{ \sum_{j=1}^{n} (a^j(x,t,u^k,\nabla u^k),\psi_{x_j}) + (a^0(x,t,u^k,\nabla u^k),\psi) \big\}\omega \big]\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_k} \big\{ \sum_{j=1}^{n} (f^{j,k},\psi_{x_j}) + (f^{0,k},\psi) \big\}\omega\,dxdt \tag{14}$$

для будь-яких $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_k) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N$, $\omega \in C_c^1(0,T)$.

Для цього, щоби довести, що ця задача має тільки один узагальнений розв'язок, тобто існує єдина функція u^k, яка володіє потрібними нам властивостями, робимо в (14) заміну змінних $u^k = v + \varphi^k$, де v – нова невідома функція. Для функції v отримуємо подібну як для u^k задачу, але з однорідною крайовою умовою. Існування узагальненого розв'язку цієї задачі доводимо методом Фаедо-Гальоркіна, а єдиність – методом від супротивного, використовуючи властивості функцій (a^j) (див., наприклад, [16]).

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ функцію u^k продовжимо нулем на всю множину Q і за цим продовженням залишимо позначення u^k. Доведемо, що послідовність $\{u^k\}$ містить підпослідовність, яка збігається в певному сенсі до $u \in SPF((a^j),(f^j),\varphi,u^0)$.

Нехай k і l – довільні натуральні числа більші за 1, а R_0, R – будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \leqslant \min\{k,l\}-1$, $R \geqslant 1$, q – дійсне число, яке задовольняє відповідні умови у формулюванні теореми 1 і таке, що $n - q/(q-2) < 0$. Тоді з леми 3, взявши $R_* := \min\{k,l\}-1$, отримаємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u^k(x,t)-u^l(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[|\nabla u^k - \nabla u^l|^2 + |u^k-u^l|^{p(x)} \Big]\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s R^{n-\frac{q}{q-2}}, \tag{15}$$

де $C_1 > 0,\ s > 0$ – сталі, які від R_0 і R не залежать.

Нехай $\varepsilon > 0$ – яке-небудь число. Виберемо довільно і зафіксуємо $R_0 > 0$ та приймемо $R \geqslant 1$ настільки великим, щоб права частина нерівності (15) була меншою за ε. Тоді для будь-яких $k > R+1$ і $l > R+1$ ліва частина нерівності (15) менша за ε. А це означає, що послідовність функцій $\{u^k|_{Q_{R_0}}\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в $[H^{1,0}(Q_{R_0}) \cap L^{p(\cdot)}(Q_{R_0}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega_{R_0}))]^N$. Оскільки $R_0 > 0$ – довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in [H^{1,0}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))]^N$ такої, що

$$u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad [H^{1,0}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))]^N. \tag{16}$$

Тепер зауважимо, що на підставі умови **3**) на (a^j), матимемо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} |a^j(x,t,u^k,\nabla u^k) - a^j(x,t,u,\nabla u)|^2\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2B^2 \iint\limits_{Q_{R_0}} [|\nabla u^k - \nabla u|^2 + |u^k - u|^2)]\,dxdt, \quad j = \overline{1,n}. \tag{17}$$

З (16) і (17), оскільки R_0 – довільне, то випливає, що

$$a^j(\cdot,\cdot,u^k(\cdot,\cdot),\nabla u^k(\cdot,\cdot)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a^j(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot),\nabla u(\cdot,\cdot)) \quad \text{(сильно) в} \quad [L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N,\ j = \overline{1,n}. \tag{18}$$

Доведемо, що існує підпослідовність $\{u^{k_s}\}$ послідовності $\{u^k\}$ така, що

$$a^0(\cdot,\cdot,u^{k_s}(\cdot,\cdot),\nabla u^{k_s}(\cdot,\cdot)) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} a^0(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot),\nabla u(\cdot,\cdot)) \quad \text{слабко в} \quad [L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N. \tag{19}$$

Нехай $R_0 > 0$ – яке-небудь число. Тоді з наслідку леми 3 (взявши $R = R_0+1$) маємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u^k(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} [|\nabla u^k(x,t)|^2 + |u^k(x,t)|^{p(x)}]\,dxdt \leqslant C_*(R_0), \tag{20}$$

де $k \geqslant R+1$, $C_*(R_0)$ – стала, яка від k не залежить. На підставі умови **2**) і нерівності Гельдера для майже всіх $(x,t) \in Q$ таких, що $p^- \leqslant p(x) \leqslant p^+$, маємо

$$|a^0_i(x,t,u^k(x,t),\nabla u^k(x,t))|^{p'(x)} \leqslant |h^0_{i,1}(x,t)(|\nabla u^k(x,t)|^{2/p'(x)} + |u^k(x,t)|^{p(x)-1})+$$

$$+h^0_{i,2}(x,t)|^{p'(x)} \leqslant (2|h^0_{i,1}(x,t)|^{p(x)} + 1)^{\frac{p'(x)}{p(x)}}(|\nabla u^k(x,t)|^2+$$

$$+|u^k(x,t)|^{p(x)} + |h^0_{i,2}(x,t)|^{p'(x)}), \quad i = \overline{1,N}. \tag{21}$$

Проінтегрувавши нерівність (21) по Q_{R_0}, врахувавши (20), отримаємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} |a^0(x,t,u^k(x,t),\nabla u^k(x,t))|^{p'(x)}\,dxdt \leqslant C_{17}(R_0), \quad k > R_0+2, \tag{22}$$

де $C_{17}(R_0) > 0$ – стала, яка від k не залежить, але може залежати від R_0.

На підставі (16) і (22), врахувавши рефлексивність простору $[L^{p(\cdot)}(Q_{R_0})]^N$, робимо висновок про існування підпослідовності $\{u^{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$ послідовності $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ та функції $\chi^0 \in [L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N$ таких, що

$$u^{k_s} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{майже всюди на} \quad Q, \tag{23}$$

$$a^0(\cdot,\cdot,u^{k_s}(\cdot,\cdot),\nabla u^{k_s}(\cdot,\cdot)) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \chi^0(\cdot,\cdot) \quad \text{слабко в} \quad [L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N. \tag{24}$$

З умови **1**) та (23) і (24) отримаємо, що

$$\chi^0(\cdot,\cdot) = a^0(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot),\nabla u(\cdot,\cdot)). \tag{25}$$

Зі (24) і (25) маємо (19).

Нехай $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{c}}(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$. Для кожного $s \geqslant s_*$, де $s_* \in \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega_{k_{s_*}}}$, з означення u^{k_s} маємо

$$\iint\limits_{Q} \big[-(u^{k_s},\psi)\omega' + \big\{ \sum_{j=1}^{n}(a^j(x,t,u^{k_s},\nabla u^{k_s}),\psi_{x_j}) + (a^0(x,t,u^{k_s},\nabla u^{k_s}),\psi)\big\}\omega\big]\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q} \big\{ \sum_{j=1}^{n}(f^{j,k_s},\psi_{x_j}) + (f^{0,k_s},\psi)\big\}\omega\, dxdt. \tag{26}$$

Перейдемо в (26) до границі при $s \to +\infty$. У підсумку, врахувавши (16), (18), (19), а також те, що $f^{j,k_s} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} f$ в $\mathbb{F}_p$, отримаємо (5) для заданої функції ψ. Оскільки ψ – довільна функція, і $u^{k_s} - \varphi^{k_s} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} u - \varphi$ в $[H^{1,0}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N$, то ми довели, що $u \in SPF((a^j),(f^j),\varphi,u^0)$.

Доведемо *єдиність узагальненого розв'язку* задачі (1) – (4) на просторі $\mathbb{A}^*_p \times \mathbb{F}_p \times \Phi_p \times \mathbb{V}$, де $p \in \mathbb{P}^*$, тобто, що множина $SPF((a^j),(f^j),\varphi,u^0)$ містить не більше одного елемента. Припустимо протилежне. Нехай u^1, u^2 – два різні елементи множини $SPF((a^j),(f^j),\varphi,u^0)$. З леми 3 ($R_*$ – довільне число) маємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u^1(x,t) - u^2(x,t)|^2\, dx \leqslant C_1 \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s R^{n-\frac{q}{q-2}}, \tag{27}$$

де R_0, R – довільні сталі такі, що $0 < R_0 < R$, $R \geqslant 1$, $q > 0$ – таке, що $n - q/(q-2) < 0$, де C_1, s – сталі, які від R_0, R не залежать. Зафіксуємо $R_0 > 0$ і перейдемо в (27) до границі при $R \to +\infty$. У підсумку отримаємо, що $u^1 = u^2$ на Q_{R_0}. Оскільки $R_0 > 0$ – довільне число, то звідси маємо, що $u^1 = u^2$ на Q, тобто отримали суперечність з нашим припущенням. Це означає, що твердження правильне.

Тепер доведемо *неперервну залежність від вхідних даних* узагальненого розв'язку задачі (1) – (4) на просторах $\mathbb{A}^{**}_p \times \mathbb{F}_p \times \Phi_p \times \mathbb{V}$ та $\mathbb{A}^*_p \times \mathbb{F}_p \times \{0\} \times \mathbb{V}$, де $p \in \mathbb{P}^*$. Легко переконатися, що достатньо розглянути випадок задачі (1) – (4) на просторі $\mathbb{A}^{**}_p \times \mathbb{F}_p \times \Phi_p \times \mathbb{V}$.

Нехай $(a^{j,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a^j)$ в $\mathbb{A}^*_p$, $(f^{j,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (f^j)$ в $\mathbb{F}_p$, $\varphi^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ в Φ_p, $u^{0,k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u^0$ в $\mathbb{V}$ і $u^k \in SPF((a^{j,k}),(f^{j,k}),\varphi^k,u^{0,k})$, $k \in \mathbb{N}$, та $u \in SPF((a^j),(f^j),\varphi,u^0)$.

Після відповідних перетворень, використовуючи лему 3, отримаємо

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |v^k(x,t)-v(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \left[|\nabla v^k-\nabla v|^2+|v^k-v|^{p(x)}\right] dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s \Big[C_1\,R^{n-\frac{q}{q-2}} + C_2 \iint\limits_{Q_R} \Big\{ \sum_{j=1}^n |f^{j,k}-f^j+a^j(\varphi+v^k)-$$

$$-a^{j,k}(\varphi^k+v^k)|^2 + |f^{0,k}-f^0+a^0(\varphi+v^k)-a^{0,k}(\varphi^k+v^k)-\varphi_t^k+\varphi_t|^{p'(x)}\Big\}\,dxdt+$$

$$+C_3 \int\limits_{\Omega_R} |u^{k,0}-u^0|^2\,dx\Big], \tag{28}$$

де R_0 і R – довільні сталі такі, що $0 < R_0 < R$, $R \geqslant 1$; C_1, C_2, s, q – деякі сталі, причому $n - q/(q-2) < 0$. Звідси, міркуючи так як у [16] та враховуючи, що $u^{0,k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u^0$ в $\mathbb{V}$, отримуємо збіжність

$$u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad [H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C([0,T];L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))]^N,$$

що і потрібно було довести.

Список використаної літератури

1. Bernis F. Elliptic and parabolic semilinear parabolic problems without conditions at infinity / F. Bernis // Arch. Rational Mech. Anal. – 1989. – Vol. 106, No. 3. – P. 217–241.
2. Boccardo L. Solutions of nonlinear parabolic equations without growth restrictions on the data / L. Boccardo, Th. Gallouët, J.L. Vazquez // Electronic J. Diff. Eq. – 2001. – Vol. 60. – P. 1–20.
3. Bokalo N.M. Boundary value problems for semilinear parabolic equations in unbounded domains without conditions at infinity / N.M. Bokalo // Siberian Math. J. – 1996. – Vol. 37, No. 5. – P. 860–867.
4. Bokalo N.M. Correctness of the first boundary-value problem and the Cauchy problem for some quasilinear parabolic systems without conditions at infinity / N.M. Bokalo // J. Math. Sci. – 2006. – Vol. 135, No. 1. – P. 2625–2636.
5. Bokalo M.M. Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity / M.M. Bokalo, O.M. Buhrii, R.A. Mashiyev // J. Nonl. Evol. Eq. Appl. – 2013. – Vol. 6. – P. 67–87.
6. Bokalo M. Initial-boundary value problems for nonlinear elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity / M. Bokalo, O. Buhrii, N. Hryadil // Nonlinear Analysis. Elsevier. USA. – 2020. – Vol. 192. – P. 1–17.
7. Bokalo M. Initial-boundary value problems for anisotropic parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains with conditions at infinity / M. Bokalo // Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA). – 2022. – Vol. 30, No. 1. – P. 98–121.
8. Brézis H. Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity / H. Brézis // Appl. Math. Optim. – 1984. – Vol. 12, No. 3. – P. 271–282.
9. Buhrii O. Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities / O. Buhrii, N. Buhrii // J. Math. Anal. Appl. – 2019. – Vol. 473. – P. 695–711.

10. Diening L. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents / L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička. – Springer, Heidelberg, 2011.
11. Kováčik O. Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$ / O. Kováčik // Fasciculi Mathematici. – 1995. – Vol. 25. – P. 87–94.
12. Mashiyev R.A. Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / R.A. Mashiyev, O.M. Buhrii // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2011. – Vol. 377. – P. 450–463.
13. Rădulescu V. Partial differential equations with variable exponents: variational methods and qualitative analysis / V. Rădulescu, D. Repovš. – CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2015.
14. Růžička M. Electroreological fluids: modeling and mathematical theory / M. Růžička. – Springer-Verl., Berlin, 2000.
15. Tikhonov A.N. Théoremes d'unicité pour l'équation de la chaleur / A.N. Tikhonov // Мат. сб. – 1935. – Т. 42, № 2. – С. 199–216.
16. Бокало М. Коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних систем в необмежених за всіма змінними областях без умов на нескінченності / М. Бокало, Т. Бокало // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2022. – Вип. 94. – С. 109–145.
17. Бугрій О.М. Задача з початковою умовою для нелінійної параболічної варіаційної нерівності в необмеженій за просторовими змінними області / О.М. Бугрій // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 30–52.
18. Олейник О.А. Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений / О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян // Успехи мат. наук. – 1976. – Том 31, № 6. – С. 142–166.

Стаття: надійшла до редколегії 20.09.2023
доопрацьована 15.11.2023
прийнята до друку 20.11.2023

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC SYSTEMS IN UNBOUNDED DOMAINS WITHOUT CONDITIONS AT INFINITY

M. Bokalo[1], T. Bokalo[1], O. Domanska[1], N. Buhrii[2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
1, Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: mm.bokalo@gmail.com,
tbokalo@gmail.com, olena.domanska@avenga.com,
[2]*National University "Lviv Polytechnic",*
5, Mytropolyt Andrei str., Building 4, 79013, Lviv, Ukraine
e-mail: nataliia.v.buhrii@lpnu.ua

Initial-boundary value problems for the parabolic equations and systems in unbounded with respect to the space variables domains were studied in many works. As is well known, in order to guarantee the uniqueness of the solutions of the initial-boundary value problems for the linear and many nonlinear parabolic equations and systems in unbounded domains, it need to impose certain restrictions on growth of the solutions at infinity, for example, to require limitations of the solutions or their belonging to some functional spaces. However, there are nonlinear parabolic equations for which the initial-boundary value problem is uniquely solvable without any conditions at infinity.

The nonlinear differential equations with the variable exponents of the nonlinearity appear in mathematical modeling of the various physical processes. In particular, these equations describe streams of the electroreological substances, recovering of the images, electric current in the conductor under the influence of the temperature field change.

Here the initial-boundary value problem with inhomogeneous boundary conditions for nonlinear parabolic systems with variable exponents of nonlinearity in unbounded in space variables domains without conditions at infinity is considered. The existence, uniqueness, and continuous dependence of data-in of weak solutions of such problems in the corresponding generalized Lebesgue and Sobolev spaces are proved. Also estimates of this solutions are obtained.

Key words: initial-boundary value problem, parabolic system, nonlinear parabolic equation, variable exponent of nonlinearity, unbounded domain, Faedo-Galyorkin method, monotone method.