

УДК 519.6

doi: 10.30970/vam.2023.31.00000

**АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНЮВАЧІ ПОХИБОК І
h-АДАПТИВНІ КУСКОВО-ПОЛІНОМІАЛЬНІ
АПРОКСИМАЦІЇ НА ТРИКУТНИХ
СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТАХ**

Г. Шинкаренко, В. Танчинець, О. Вовк

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: vasyl.tanchynets@lnu.edu.ua*

Розв'язання сингулярно збуреної двовимірної крайової задачі дифузії-адвекції-реакції (ДАР) виконується методом скінченних елементів (МСЕ) з використанням кусково лінійних, квадратичних або кубічних апроксимацій на сітках з трикутних скінченних елементів. Для контролю точності знайденого наближення запропоновано поелементно визначені поліноміальні апостеріорні оцінювачі похибок (АОП), які обчислюють нижні межі істинних похибок МСЕ. Ці АОП формують системи керування h -адаптивними схемами МСЕ, які вживають локальне поліпшення триангуляцій методом бісекцій. Надійність та ефективність запропонованих схем ілюструється результатами числового моделювання.

Ключові слова: задача дифузії-адвекції-реакції, метод скінченних елементів, апостеріорний оцінювач похибки, h -адаптивна схема, метод бісекцій.

1. ВСТУП

У застосуваннях комп'ютерного моделювання багатьох важливих фізичних об'єктів і процесів одним із найбільш поширених числових методів є метод скінченних елементів [2, 9]. Поряд із прогресом інформаційних технологій і можливостей комп'ютерів два фактори стали основою цієї успішної методології: (i) варіаційне формулювання інженерних і наукових проблем, (ii) простори апроксимацій Рітца-Гальоркіна з базисними функціями з локальними носіями та інтерполяційними властивостями. Якщо перший фактор допоміг створити солідні математичні засади МСЕ [3, 4], то другий через поділ областей визначення розв'язків зі складною геометричною структурою на простіші частини (скінченні елементи) значно розширив можливості аналізу реальних інженерних і наукових проблем [5, 9]. Для більшості схем МСЕ сьогодні знайдено достатні умови збіжності послідовностей його апроксимацій до точних розв'язків та апіорні оцінки порядків цієї збіжності [2-4, 8].

Щоб надати надійну кількісну характеристику окремого конкретного наближення, останніми десятиліттями алгоритми та програмні засоби МСЕ активно доповнюються апостеріорними оцінювачами похибок його апроксимацій [3, 4, 8] та адаптивними видозмінами його схем (АМСЕ) [1-4, 8, 9]. Особливо важливим інструментом АМСЕ стають в аналізі та ефективному розв'язанні сингулярно збурених задач, розв'язки яких мають особливості у вигляді примежових та/або внутрішніх шарів [1, 4, 9]. Оминаючи інші відомі варіанти АМСЕ, ми визначимо схеми поліпшення якості наближень шляхом локального згущення сітки лише в околі згаданих шарів (h -адаптування, h -АМСЕ), за деталями див. [6, 7-9]. Такі АОП та h -АМСЕ було

сконструйовано, досліджено та успішно використано, наприклад, під час розв’язання сингулярно збурених задач дифузії-адвекції-реакції [1, 6, 7] та еластостатики [9].

Ми доповнюємо методику побудови АОП та h -АМСЕ, розвинену авторами [1, 2, 6, 7] для розв’язання двовимірних задач ДАР з кусково лінійними апроксимаціями на сітках з трикутників, подібними АОП і схемами з квадратичними та кубічними апроксимаціями на трикутних скінченних елементах.

У пп. 2 і 3 ми формулюємо крайову задачу для еліптичного рівняння ДАР, відповідну їй варіаційну задачу та відзначаємо достатні умови її коректності. У пп. 4 і 5 подано дискретизацію Гальоркіна й особливості обчислення її системи лінійних алгебричних рівнянь з використанням базисних функцій з локальними носіями. Тут же зазначено, що всі необхідні обчислення на скінченних елементах уніфікуються введенням взірцевого трикутника та функцій базису в його барицентричних координатах. У п. 6 конкретизуємо вигляд лінійних, квадратичних і кубічних базисних функцій на взірцевому трикутнику і у п. 7 подаємо відповідні їм поелементно визначені поліноміальні апостеріорні оцінювачі похибок апроксимацій МСЕ. У п. 9 розглянуто стратегію пошуку оптимальної схеми МСЕ, яка гарантує рівномірний розподіл похибок по всіх скінченних елементах. П. 10 присвячено аналізу числових експериментів із задалегідь заданою точністю наближених розв’язків і порівнянню збіжності послідовностей апроксимацій МСЕ, обчислених на рівномірно та локально згущуваних сітках.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Розглянемо крайову задачу дифузії-адвекції-реакції

$$\begin{cases} \text{знайти } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -\nabla \cdot (\mu \nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \sigma u = f \text{ в } \Omega, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma_u \subset \Gamma, \text{ mes}(\Gamma_u) > 0, \\ -(\mu \nabla u) \cdot n = \alpha u + g \text{ на } \Gamma_q := \Gamma \setminus \Gamma_u, \end{cases} \quad (1)$$

де Ω – обмежена зв’язна область точок $x = \{x_i\}_{i=1}^2$ евклідового простору \mathbb{R}^2 з неперервною за Ліпшицем межею $\Gamma = \partial\Omega$, $n = \{n_i\}_{i=1}^2$, $n_i = \cos(n, x_i)$ – вектор одиничної зовнішньої нормалі до межі Γ , $\nabla = \{\partial/\partial x_i\}_{i=1}^2$ – оператор обчислення градієнта, $a \cdot b = \sum_{i=1}^2 a_i b_i$ – скалярний добуток векторів $a = \{a_i\}_{i=1}^2$ і $b = \{b_i\}_{i=1}^2$.

У рівняннях задачі ДАР (1) використано такі позначення: $\mu = \{\mu_{ij}(x)\}_{i,j=1}^2$ – матриця коефіцієнтів дифузії, $\beta = \{\beta_i(x)\}_{i=1}^2$ – вектор швидкості перенесення (адвекції), $\sigma = \sigma(x) \geq 0$ – коефіцієнт біохімічної реакції, $f = f(x)$ – інтенсивності джерел, розподілених в області Ω , $\alpha = \alpha(x) \geq 0$ – коефіцієнт взаємодії субстанції з доквіллям, $g = g(x)$ – інтенсивність джерел притоку (відтоку) субстанції на межі області Ω .

Тут і далі будемо вважати, що задані функції $\mu, \beta, \sigma, f, \alpha$ та g достатньо регулярні.

(і) Зокрема, коефіцієнти дифузії $\mu = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^2 \in [L^\infty(\Omega)]^{2 \times 2}$ задовольняють умови додатної визначеності та симетрії

$$\begin{cases} \mu_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 \mu_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu_1 |\xi|^2 \quad \forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^2 \in \mathbb{R}^2, \\ \mu_{ij}(x) = \mu_{ji}(x), \quad i, j = 1, 2 \text{ майже скрізь в } \Omega, \quad \mu_0, \mu_1 = \text{const} > 0; \end{cases}$$

(ii) вектор адвекції $\beta = \{\beta_i\}_{i=1}^2 \in H(\text{div}; \Omega) \cap [L^\infty(\Omega)]^2$ задовольняє умову нестисливості

$$\nabla \cdot \beta = \sum_{i=1}^2 \partial \beta_i / \partial x_i = 0 \text{ майже скрізь в } \Omega;$$

(iii) коефіцієнт взаємодії з довіллям $\alpha \in L^\infty(\Gamma_q)$ і

$$\alpha \geq 0 \text{ майже скрізь на } \Gamma_q.$$

Щоб розпочати аналіз задачі (1) стосовно її сингулярної збуреності, перейдемо в області Ω до безрозмірних величин, для цього введемо заміну змінних $t = (\text{diam } \Omega)^{-1}x$, де $t \in [0, 1]^2$. Тоді рівняння задачі (1) набуде вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти } u = u(t) \text{ таку, що} \\ -\nabla \cdot (\bar{\mu} \nabla u) + Pe[\bar{\beta} \cdot \nabla u + Sh \bar{\sigma} u] = \bar{f} \text{ в } \bar{\Omega} \subset [0, 1]^2, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma_u \subset \Gamma, \text{ mes}(\Gamma_u) > 0, \\ -(\bar{\mu} \nabla u) \cdot n = \bar{\alpha} u + \bar{g} \text{ на } \Gamma_q := \Gamma \setminus \Gamma_u, \end{cases}$$

де

$$\begin{cases} \bar{\mu} := \mu |\mu|^{-1}, \quad \bar{\beta} := \beta |\beta|_\infty^{-1}, \quad \bar{\sigma} := \sigma |\sigma|_\infty^{-1}, \\ \bar{f} := (\text{diam } \Omega)^2 |\mu|^{-1} f, \quad \bar{\alpha} := \alpha \text{diam } \Omega |\mu|^{-1}, \quad \bar{g} := \text{diam } \Omega |\mu|^{-1} g, \\ \|\sigma\|_\infty := \text{ess sup}_{t \in \Omega} |\sigma(x)|, \quad \|\beta\|_\infty^2 := \sum_{i=1}^2 \|\beta_i\|_\infty^2, \quad \|\mu\|^2 := \sum_{i,j=1}^2 \|\mu_{i,j}\|_\infty^2. \end{cases}$$

Якщо число Пекле $Pe := \text{diam } \Omega |\beta|_\infty |\mu|^{-1} \rightarrow \infty$, то в процесі мігрування домінує конвективне перенесення частинок субстанції, або якщо число Струхала $Sh := \text{diam } \Omega |\sigma|_\infty |\mu|^{-1} \rightarrow \infty$, тобто коефіцієнти реакції значно переважають над коефіцієнтами дифузії, і сформульована задача стає сингулярно збуреною, то для її розв'язання потрібно застосовувати адаптивні схеми МСЕ.

Скрізь нижче ми використовуємо варіаційне формулювання крайової задачі (1), на підставі якого МСЕ дає змогу обчислювати якісні наближення до її узагальненого розв'язку.

3. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Варіаційне формулювання крайової задачі (1) має такий вигляд:

$$\begin{cases} \text{знайти } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_u\} \text{ таку, що} \\ a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (2)$$

де структурні елементи варіаційного рівняння визначено таким способом:

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} [(\mu \nabla u) \cdot \nabla v + v(\beta \cdot \nabla u + \sigma u)] dx + \int_{\Gamma_q} \alpha u v d\gamma \quad \forall u, v \in V, \\ \langle l, v \rangle &:= \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_q} g v d\gamma \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} [(\mu \nabla u) \cdot \nabla v + \frac{1}{2} \beta \cdot (v \nabla u - u \nabla v) + (\sigma - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta) u v] dx \\ &+ \int_{\Gamma_q} (\alpha + \frac{1}{2} \beta \cdot n) u v d\gamma \quad \forall u, v \in V, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\langle l, v \rangle := \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_q} g v d\gamma \quad \forall v \in V. \quad (4)$$

За умови

$$\alpha + \frac{1}{2}\beta.n \geq 0 \text{ майже скрізь на } \Gamma_q$$

у [1] доведено, що білінійна форма (3) є V – еліптичною та неперервною і породжує енергетичну норму

$$\|v\|_V := \sqrt{a(v, v)} \quad \forall v \in V,$$

яка еквівалентна стандартній нормі простору Соболева $H^1(\Omega)$. На додаток за допущення, що

$$f \in L^2(\Omega), \quad g \in L^2(\Gamma_q),$$

з'ясовано, що лінійний функціонал (4) неперервний на просторі V .

Наведені тут властивості білінійної форми та лінійного функціонала розглядуваної задачі задовольняють гіпотези теореми Лакса-Мільграма-Вишика, яка стверджує: варіаційна задача (2) коректно сформульована, тобто існує єдиний розв'язок $u \in V$ і він неперервно залежить від даних задачі.

4. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ГАЛЬОРКІНА

Основна ідея методу Гальоркіна полягає в перенесенні розв'язання варіаційної задачі з нескінченновимірному простору допустимих функцій V в належно вибраний скінченновимірний підпростір $V_h \subset V$. На цьому шляху варіаційна задача врешті-решт переформулюється в систему алгебричних рівнянь, методи розв'язання яких добре розвинені та реалізовані в потужних пакетах програм. За надані нам можливості потрібно розраховуватися – замість точного розв'язку $u \in V$ варіаційної задачі одержуємо лише його наближення $u_h \in V_h$ те, що можна назвати *апроксимацією розв'язку* цієї задачі в просторі V .

Дотримуючись цієї думки, у заданому просторі допустимих функцій V виберемо послідовність підпросторів $V_h \subset V$, провівши дискретизацію області Ω так. Покриємо область Ω сіткою $\mathfrak{S}_h = \{K\}$ скінченних елементів K , будемо позначати $h_K = \text{diam } K$, $h = \max_{K \in \mathfrak{S}_h} h_K$. Тоді варіаційна задача переформулюється в послідовність задач

$$\begin{cases} \text{задано } h = \text{const} > 0 \text{ і } V_h \subset V, \dim V_h = n < +\infty, \\ \text{знайти } u_h \in V_h \text{ такий, що } a(u_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V_h. \end{cases}$$

Добре відомо, що за виконання умов

$$\dim V_h = N(h) \rightarrow \infty \text{ при } h \rightarrow 0, \quad \bigcup_{h>0} V_h = V,$$

послідовність апроксимацій Гальоркіна $\{u_h\}_{h>0} \subset V$ збігається до істинного розв'язку вихідної варіаційної задачі (2) разом з $h \rightarrow 0$.

Позначимо $I_h = \{A_i\}_{i=1}^N$ множини всіх вузлів $A_i = (x_i, y_i)$, $A_i \notin \Gamma_u$, триангуляції \mathfrak{S}_h , і поставимо у відповідність кожній точці A_i кусково визначену неперервну функцію $\varphi_i = \varphi_i(x, y)$ з простору поліномів $P_m(K)$ таку, що

$$\begin{cases} \Omega_i \equiv \text{supp } \varphi_i := \{\cup K \in \mathfrak{S}_h : A_i \in \bar{K}\}, \\ \varphi_i(A_j) = \delta_{ij} \quad \forall A_i \in I_h, \quad \varphi_i \in P_m(K) \quad \forall K \in \Omega_i, \end{cases} \quad (5)$$

де $P_m(K)$ – простір поліномів порядку m , визначених на K . Тоді підпростір апроксимацій МСЕ матиме такий вигляд: $V_h := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$, а наближений розв'язок u_h визначається у вигляді лінійної комбінації

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N q_j \varphi_j(x),$$

значення коефіцієнтів q_1, \dots, q_N якої визначаються процедурою Рітца-Гальборкіна з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) q_j = \langle l, \varphi_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Неважко переконатися, що за виконання гіпотез теореми Лакса-Мільграма-Вишика система рівнянь МСЕ (6) однозначно розв'язна, а її матриця

$$S = \{a(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N$$

додатно визначена.

5. СИСТЕМА АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ МСЕ

Одними з ключових особливостей, які визначають обчислювальну ефективність використання МСЕ, є технології знаходження коефіцієнтів системи рівнянь (6), вибір форматів їх збереження в пам'яті комп'ютера та методів її розв'язання. Всі вони пов'язані з локальністю носіїв базисних функцій МСЕ, позначену у визначенні (5).

По-перше, зазначимо правило

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad \text{якщо } \Omega_{ij} := \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

яке априорі визначає нульові значення коефіцієнтів матриці $S = \{a(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N$ та їхнє місце розташування в її структурі. Отже, в загальному випадку матриця МСЕ лише частково (незначно) заповнена ненульовими коефіцієнтами. Цей факт ставить нас перед вибором: чи запам'ятати нульове значення коефіцієнта матриці $S_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ в її структурі (для подальшого використання прямих методів розв'язання системи (6) не надто великих порядків), чи запам'ятати лише пару індексів $\{i, j\}$ ненульового коефіцієнта (з метою застосування ітераційних методів розв'язання (6) великих порядків).

По-друге, правило (7) підказує природну декомпозицію обчислення значення ненульових коефіцієнтів матриці та прямих частин системи (6)

$$S_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{K \in \Omega_{ij}} a_K(\varphi_i, \varphi_j), \quad (8)$$

$$a_K(\varphi_i, \varphi_j) := \int_K [(\mu \nabla \varphi_i) \cdot \nabla \varphi_j + \varphi_j (\beta \cdot \nabla \varphi_i + \sigma \varphi_i)] dx + \int_{\partial K \cap \Gamma_q} \alpha \varphi_i \varphi_j d\gamma$$

та

$$L_i = \langle l, \varphi_i \rangle = \sum_{K \in \Omega_i} \langle l_K, \varphi_i \rangle, \quad (9)$$

$$\langle l_K, \varphi_i \rangle := \int_K f \varphi_i dx + \int_{\partial K \cap \Gamma_q} \alpha \varphi_i d\gamma \quad \forall K \in \Omega_i.$$

Формули (8) і (9) також детально окреслюють підмножини скінченних елементів, задіяні в обчисленнях коефіцієнтів матриці S_{ij} та вектора правих частин L_j – це лише невеликі порції скінченних елементів, які становлять множини $\Omega_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$ та Ω_i триангуляції \mathfrak{S}_h .

По-третє, формули (8) і (9) обчислення внесків зі скінченних елементів K в загальному випадку потребують числового інтегрування з використанням високоточних квадратур, які запроєктовані для канонічних областей, скажімо, відрізка $I = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq 1\}$ в одновимірному випадку чи трикутника

$$K_* = \{(\xi, \eta) \in [0, 1]^2 \in \mathbb{R}^2 : \xi + \eta \leq 1\} \quad (10)$$

у двовимірному випадку. Так чи інакше, їхнє застосування потребує заміни глобальних змінних $(x_1, x_2) \in K$ під знаком інтеграла на локальні змінні $(\xi, \eta) \in K_*$. Якщо це так, то насправді для програмної реалізації схем МСЕ достатньо визначити структуру базисних функцій МСЕ лише в локальних координатах канонічного скінченного елемента (10), що також гарантує однорідність обчислень на всіх елементах триангуляції.

Одним із поширених способів переходу до локальних координат трикутного скінченного елемента є використання його барицентричних координат для заміни змінних та опису базисних функцій МСЕ на ньому. Нехай, наприклад, трикутник K має вершини у вузлах із номерами $A_i = (x_{1i}, x_{2i})$, $i = 1, 2, 3$, обхід яких виконується рухом проти годинникової стрілки; в тих випадках, які можуть приводити до непорозумінь, позначатимемо його так: $K = K_{123}$. Використовуючи глобальну систему координат $(x_1, x_2) \in \Omega$ на цьому трикутнику $K \in \mathfrak{S}_h$, система барицентричних координат $\{L_i(x_1, x_2)\}_{i=1}^3$ визначається згідно з правилами

$$L_i(x_1, x_2) = \frac{1}{2}|K|^{-1}(a_i + b_i x_1 + c_i x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in K, \quad i = 1, 2, 3,$$

де

$$\begin{cases} a_i = x_{1i}x_{2j} - x_{1j}x_{2i}, \\ b_i = x_{2j} - x_{2l}, \\ c_i = -x_{1j} + x_{1l}, \quad i, j, l = 1, 2, 3, \quad i \rightarrow j \rightarrow l \rightarrow i, \end{cases}$$

і $|K| = (b_1c_2 - b_2c_1)$ – площа цього трикутника.

Подібно на канонічному трикутнику K_* визначимо барицентричні координати в локальних змінних (ξ, η) так:

$$L_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad L_2(\xi, \eta) = \xi, \quad L_3(\xi, \eta) = \eta. \quad (11)$$

Тоді перехід від глобальних змінних на кожному трикутному скінченному елементі $K \in \mathfrak{S}_h$ до локальних змінних виконується за допомогою такого відображення: координати довільної точки $(x_1, x_2) \in K$ визначають згідно з правилами

$$\begin{cases} x_1(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 x_{1i}L_i(\xi, \eta), \\ x_2(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 x_{2i}L_i(\xi, \eta) \quad \forall (\xi, \eta) \in K_*. \end{cases}$$

Тепер неважко знайти в теорії інтегрування, що, наприклад,

$$\begin{aligned} \int_K \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_{K_*} \varphi[x_1(\xi, \eta), x_2(\xi, \eta)] |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \\ &= \int_{K_*} \bar{\varphi}(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (12)$$

де якобіан переходу

$$J(\xi, \eta) := \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad |J(\xi, \eta)| := \det J(\xi, \eta). \quad (13)$$

Визначення $\bar{\varphi}(\xi, \eta) := \varphi[x_1(\xi, \eta), x_2(\xi, \eta)]$ доводить достатність опису будь-яких базисних функцій МСЕ у локальній системі координат канонічного трикутника. Нижче ми доповнюємо правило (12) важливим для застосувань випадком, у якому замість значень підінтегральної функції фігурують її часткові похідні першого порядку

$$\int_K \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{K_*} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta, \quad (14)$$

$$\int_K \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{K_*} \left(-\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta. \quad (15)$$

Зазначимо, що формули (12)–(15) залишаються застосовними в загальному випадку використання навіть криволінійних трикутних та/або чотирикутних скінченних елементів.

6. АПРОКСИМАЦІЇ МСЕ НА ТРИКУТНИКАХ

Вживаючи локальні (скажімо, барицентричні координати (11)) на трикутних скінченних елементах опишемо лінійні, квадратичні та кубічні апроксимації МСЕ та їхні базисні функції.

(i) Нехай шукана апроксимація $u_h \in V_h \cap C(\Omega)$ і на кожному елементі поділу $\mathfrak{S}_h = \{K\}$ вона є поліномом першого порядку, іншими словами, $u_h|_K \in P_1(K)$. Припустимо, що трикутник $K = K_{ijl}$ має вершини $\{A_n\}_{n=i,j,l}$, обхід яких виконується рухом проти годинникової стрілки. Тоді шукана *лінійна апроксимація* на ньому окреслюється в локальних змінних виразом

$$u_h|_K = \sum_{n=i,j,l} u_h(A_n) \bar{\varphi}_n(\xi, \eta) \quad \forall (\xi, \eta) \in K_* \quad (16)$$

з базисними функціями

$$\bar{\varphi}_i := L_i \equiv 1 - \xi - \eta, \quad \bar{\varphi}_j := L_j \equiv \xi, \quad \bar{\varphi}_l := L_l \equiv \eta. \quad (17)$$

(ii) У випадку кусково квадратичної апроксимації $u_h|_K \in P_2(K)$ визначаємо

$$u_h|_K = \sum_{n=i,j,l} [u_h(A_n) \bar{\varphi}_n(\xi, \eta) + u_h(B_n) \bar{\psi}_n(\xi, \eta)] \quad \forall (\xi, \eta) \in K_*, \quad (18)$$

де

$$\bar{\varphi}_n := (2L_n - 1)L_n, \quad n = i, j, l, \quad (19)$$

вузол $B_i := \frac{1}{2}(A_i + A_j)$ ділить сторону $K_{ij} = (A_i, A_j) \subset \partial K_{ijl}$ навпіл, а відповідна йому базисна функція записується так:

$$\bar{\psi}_i := 4L_i L_j. \quad (20)$$

(iii) У випадку кусково кубічних апроксимацій $u_h|_K \in P_3(K)$ використовуємо повний поліном третього порядку такого вигляду:

$$u_h|_K = \sum_{n=i,j,l} [u_h(A_n)\bar{\varphi}_n(\xi, \eta) + u_h(D_n)\bar{\psi}_n(\xi, \eta) + u_h(G_n)\bar{\chi}_n(\xi, \eta)] + u_h(C_K)\bar{\varphi}_K(\xi, \eta) \quad \forall(\xi, \eta) \in K_*, \quad (21)$$

де вузлам триангуляції у вершинах $\{A_n\}_{n=i,j,l}$ приписано функції базису

$$\bar{\varphi}_n := \frac{1}{2}L_n(3L_n - 1)(3L_n - 2), \quad n = i, j, l, \quad (22)$$

вузли $D_i := \frac{1}{3}(2A_i + A_j)$ і $G_i := \frac{1}{3}(A_i + 2A_j)$ ділять сторону $K_{ij} = (A_i, A_j) \subset \partial K_{ijl}$ на три рівні частини, приписані їм базисні функції набувають вигляду

$$\bar{\psi}_i := \frac{9}{2}L_iL_j(3L_i - 1), \quad \bar{\chi}_i := \frac{9}{2}L_iL_j(3L_j - 1) \quad (23)$$

відповідно, а вузлу (центру трикутника $K = K_{ijl}$) $C_K := \frac{1}{3} \sum_{n=i,j,l} A_n$ приписано базисну функцію (бульбашку)

$$\bar{\varphi}_K := 27L_iL_jL_l. \quad (24)$$

Нарешті, з огляду на визначення лінійних базисних функцій (17), квадратичних (19) і (20), а також кубічних (22), (23) і (24) наголосимо на такій важливій властивості – вирази (16), (18) і (21), в загальному випадку, можуть бути використані як інтерполяційні поліноми Лагранжа першого, другого та третього порядків, відповідно, які побудовані з використанням значень інтерпольованої функції у вузлах кожного трикутного скінченного елемента.

7. АПРІОРНІ ОЦІНКИ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ

Добре відомо, що у випадку існування достатньо регулярного розв'язку, наприклад, $u \in V \cap H^{r+1}(\Omega)$, $r \geq 1$, задачі (2) апріорна похибка апроксимації $u_h \in V_h \subset V$, обчислена з використанням кусково визначених поліноміальних базисних функцій порядку $m \geq 1$, окреслюється оцінкою інтерполяційного гатунку

$$\|u - u_h\|_{H^k(\Omega)} \leq Ch^{m+1-k}|u|_{H^{r+1}(\Omega)}, \quad 0 \leq k \leq r, \quad (25)$$

де значення сталої $C > 0$ не залежить від величин, які нас цікавлять. Ця оцінка містить величини сталих $C > 0$, $r \geq 0$ і напівнорми $|u|_{H^{r+1}(\Omega)}$, які зазвичай залишаються в застосуваннях невідомими. Тому (25) доповнює факт збіжності послідовності апроксимацій МСЕ $\{u_h\}_{h>0} \subset V$ знанням порядку $p := m + 1 - k$ швидкості цієї збіжності залежно від вибраної норми простору $H^k(\Omega)$ (в застосуваннях $k = 0$ та/або $k = 1$) та порядку $m \geq 1$ вжитих кусково визначених поліноміальних базисних функцій. Отже, насправді оцінка (25) окреслює похибку як величину $O(h^p)$, яка характеризує одночасно *цілий клас апроксимацій* МСЕ, обчислених на всіляких можливих триангуляціях з тим самим значенням параметра $h > 0$.

Для ґрунтовнішого аналізу похибки конкретної апроксимації з цього класу наближень потрібен додатковий інструментарій у вигляді апостеріорних оцінок похибки.

8. АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНКИ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ

Щоб схарактеризувати похибку наближеного розв'язку $u_h \in V_h$, обчисленого на певній триангуляції \mathfrak{S}_h , детальніше треба проаналізувати можливість розв'язку задачі про похибку [2]

$$\begin{cases} \text{задано } \mathfrak{S}_h, V_h \text{ та апроксимацію } u_h \in V_h, \\ \text{знайти } e_h := u - u_h \in E, V = E \oplus V_h \text{ таку, що} \\ a(e_h, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle \quad \forall v \in E, \end{cases} \quad (26)$$

де $\langle \rho(u_h), v \rangle = \langle l, v \rangle - a(u_h, v)$ – функціонал лишку.

Знайти розв'язок задачі (26) так само важко, як і точний розв'язок задачі (2). Реальною можливістю аналізу властивостей похибки є обчислення наближеного розв'язку (26) дискретизацією Гальоркіна в деякому скінченновимірному підпросторі $E_h \subset E$. Безперечно, з огляду на трудомісткість процедур триангуляції багатовимірних областей одразу варто зауважити, що простір E_h доцільно будувати з використанням триангуляції \mathfrak{S}_h , на якій був знайдений наближений розв'язок $u_h \in V_h$. В такому разі дискретизована задача про похибку має такий вигляд:

$$\begin{cases} \text{задано } \mathfrak{S}_h, u_h \in V_h \text{ та } E_h \subset E, \dim E_h = M(h) < +\infty, \\ \text{знайти апроксимацію похибки } \varepsilon_h \in E_h \text{ таку, що} \\ a(\varepsilon_h, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle \quad \forall v \in E_h. \end{cases} \quad (27)$$

Означення 1 (апостеріорного оцінювача похибки апроксимації МСЕ). Розв'язок $\varepsilon_h \in E_h$ задачі (27) будемо називати апостеріорним оцінювачем похибки апроксимації $u_h \in V_h$, а множину функцій його звужень $\{\varepsilon_h|_K\}_{K \in \mathfrak{S}_h}$ називатимемо розподілом індикаторів АОП на триангуляції \mathfrak{S}_h .

8.1. АОП ДЛЯ КУСКОВО ЛІНІЙНИХ І КВАДРАТИЧНИХ АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ

Далі за базис простору E_h обиратимемо систему поелементно визначених функцій

$$\{\phi_K(x)\}_{K \in \mathfrak{S}}, \quad \text{supp } \phi_K = K,$$

порядок яких вищий за порядок апроксимацій МСЕ. Наприклад, для лінійних і квадратичних апроксимацій за базисні функції оцінювача візьмемо $\phi_K = 27L_1L_2L_3$ (відома під назвою як кубічна функція бульбашка), її графік зображено на рис. 1.

У цих випадках розв'язок дискретизованої задачі (27) можна подати у вигляді лінійної комбінації з невідомими коефіцієнтами λ_K

$$\varepsilon_h(x) = \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \lambda_K \phi_K(x), \quad (28)$$

де $E_h := \text{span}\{\{\phi_K(x)\}_{K \in \mathfrak{S}_h}\}$ – базис E_h , який обирали у вигляді

$$\text{supp } \phi_K = K, \quad \phi_K(x) = 27L_1^K(x)L_2^K(x)L_3^K(x) \quad \forall K \in \mathfrak{S}_h.$$

Тут $\{L_i^K(x)\}_{i=1}^3$ – барицентричні координати трикутника K .

Важливою з погляду складності обчислень АОП та його індикаторів є лема.

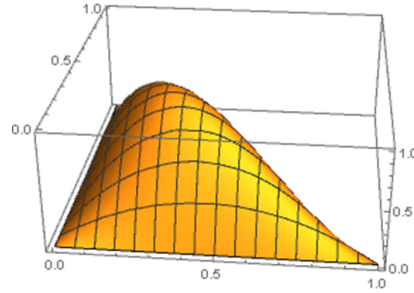


Рис. 1. Базисна функція АОП у випадку лінійних і квадратичних апроксимацій

Лема 1 (про ортогональність базису підпростору E_h). Множина функцій $\{\phi_K(x)\}_{K \in \mathfrak{S}_h}$ утворює ортогональний базис підпростору $E_h := \text{span}[\{\phi_K(x)\}_{K \in \mathfrak{S}_h}]$ в тому сенсі, що

$$a(\phi_K, \phi_{K'}) = 0 \quad \forall K, K' \in \mathfrak{S}_h, K \neq K'.$$

Враховуючи цей факт, зазначимо, що коефіцієнт λ_K визначаємо обчисленнями лише на одному скінченному елементі (локальному носії $\phi_K(x)$) у вигляді

$$\lambda_K = \frac{\langle \rho(u_h), \phi_K \rangle}{a(\phi_K, \phi_K)} = \frac{\langle \rho(u_h), \phi_K \rangle_K}{a_K(\phi_K, \phi_K)} \quad (29)$$

для кожного скінченного елемента K триангуляції \mathfrak{S}_h .

Отже, лінійна комбінація (28) з коефіцієнтами, визначеними у вигляді (29), описує на триангуляції \mathfrak{S}_h апостеріорний оцінювач похибки апроксимації $u_h \in V_h$ у вигляді відрізка ортогонального ряду.

8.2. АОП для кусково кубічних апроксимацій МСЕ

У випадку знайдених кубічних апроксимацій АОП обчислювали у дещо складнішому вигляді

$$\varepsilon_h(x) = \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \varepsilon_h^K(x) = \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} [\lambda_1^K \psi_1^K(x) + \lambda_2^K \psi_2^K(x) + \lambda_3^K \psi_3^K(x)], \quad (30)$$

де

$$\psi_i^K(x) = L_i^K(x) L_1^K(x) L_2^K(x) L_3^K(x).$$

У цьому випадку коефіцієнти $\{\lambda_i^K\}_{i=1}^3$ обчислюються розв'язанням системи трьох лінійних алгебричних рівнянь на кожному скінченному елементі сітки

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^K a(\psi_i^K, \psi_j^K) = \langle \rho(u_h), \psi_j^K \rangle \quad j = 1, 2, 3.$$

Величину

$$\eta_K = \|\varepsilon_K\| := \sqrt{\int_K (\varepsilon_K^2 + |\nabla \varepsilon_K|^2) dx}$$

іноді називають *локальним індикатором похибки* на скінченному елементі K , а величину

$$\eta = \|\varepsilon_h\| := \sqrt{\sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \|\varepsilon_K\|^2}$$

глобальним індикатором похибки.

9. СТРАТЕГІЯ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНОЇ СХЕМИ МСЕ

Для обчислення апроксимацій МСЕ із заздалегідь заданою точністю $TOL > 0$ ми застосували ітераційний алгоритм h -адаптування з таким локальним поліпшеннями структури біжучої триангуляції. На підставі знайдених розподілів локальних індикаторів похибки на сітці \mathfrak{S}_h визначається множина $\mathfrak{R}_h(TOL) := \{K \in \mathfrak{S}_h : \tilde{\eta}_K \geq TOL\}$ трикутників $K \in \mathfrak{S}_h$, які не задовольняють умову наперед заданої допустимої похибки, де

$$\tilde{\eta}_K := \sqrt{\text{Card}(\mathfrak{S}_h)} \frac{\|\varepsilon_K\|}{\|u_h + \varepsilon_h\|} 100\%. \quad (31)$$

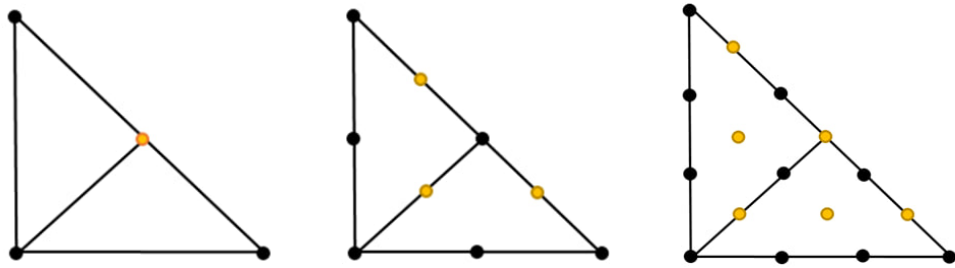


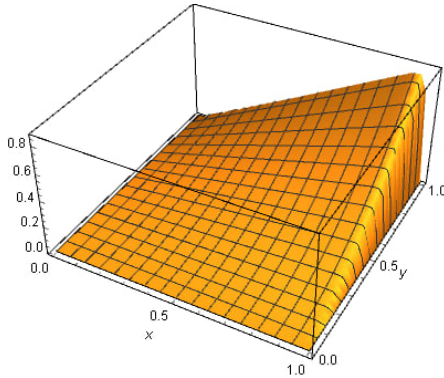
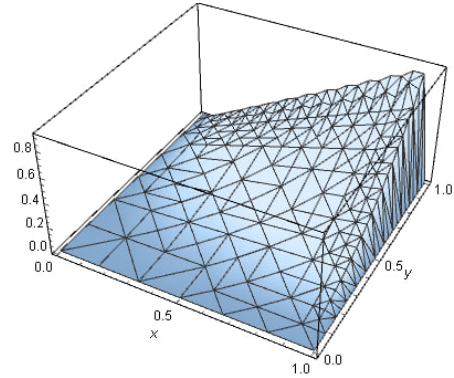
Рис. 2. Метод бісекції, зліва-направо: лінійні, квадратичні та кубічні апроксимації

Локальне поліпшення якості триангуляції виконувалося поділом трикутників множини \mathfrak{R}_h методом бісекції [1, 6, 7]. Суть полягає у поділі скінченного елемента на два нові трикутники, шляхом додавання відрізка, який з'єднує вершину трикутника з вузлом, що лежить на середині протилежної сторони. Для поділу обирається найдовша сторона трикутника та, відповідно, найбільший кут трикутника навпроти неї, що запобігає виникненню малих кутів у модифікованій триангуляції. У випадку лінійних апроксимацій в сітку додається один новий вузол, у випадку квадратичних – три, а для кубічних – шість (рис. 2).

Оскільки інші вузли не переміщуються, то в процесі адаптування отримуємо вкладені сітки, та, відповідно, вкладені простори апроксимацій, побудовані на цих сітках. Алгоритм методу бісекції рекурсивний. Якщо найдовша сторона трикутника прилягає до іншого трикутника, для того щоб уникнути “підвішених” вузлів, то сусідній трикутник теж потрібно поділити, навіть якщо похибка на ньому не перевищує допустимий рівень.

10. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Тут ми подаємо деякі результати числового розв'язання модельної сингулярно збуреної крайової задачі за допомогою вищеописаних h -адаптивних схем МСЕ з кусково лінійними, квадратичними та кубічними апроксимаціями на трикутних скінченних елементах. Головна мета цих експериментів – проаналізувати характер збіжності до точного розв'язку задачі послідовностей апроксимацій МСЕ на рівномірно згущуваних триангуляціях і локально згущуваних триангуляціях з використанням АОП (28) та (30).

Рис. 3. Точний розв'язок $u \in V$ Рис. 4. Апроксимація $u_h|_K \in P_3(K)$, $i = 4$

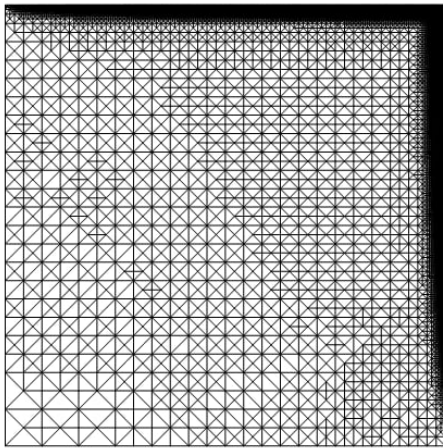
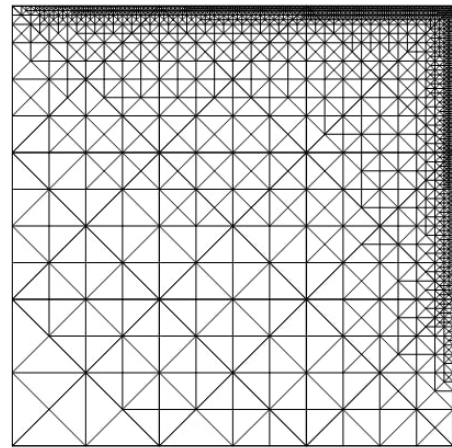
Нижче вибираємо за модельну задачу [6]

$$-\mu\Delta u + (2, 3)\cdot\nabla u = f \quad \text{в } \Omega = (0, 1)^2, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma,$$

розв'язком якої є функція $u(x) = x_1x_2^2 - x_2^2g(2, x_1) + g(3, x_2)[g(2, x_1) - x_1]$, де

$$\mu = 2 \times 10^{-2}, \quad f(x) = 2\{(\mu - 3x_2)[g(2, x_1) - x_1] - g(3, x_2) + x_2^2\}, \quad g(\gamma, t) := \exp[\mu^{-1}\gamma(t-1)].$$

На рис. 3 добре видно примезовий шар цього розв'язку, сингулярна збуреність якого характеризується досить великим числом Пекле $Pe \cong 180$.

Рис. 5. Лінійні апроксимації,
 $Card(\mathfrak{S}_{18}) = 119917$ Рис. 6. Квадратичні апроксимації,
 $Card(\mathfrak{S}_{11}) = 3113$

Таку задачу розв'язували МСЕ з використанням рівномірного згущення сітки та з використанням h -адаптивних схем з кусково лінійними, квадратичними та кубічними апроксимаціями. У всіх експериментах обчислення розпочиналися на рівномірній сітці зі 36 скінченних елементів і завершувалися її рівномірним поділом або локальним згущенням до досягнення допустимого рівня відносної похибки (31)

Таблиця 1

АОП і порядки збіжності апроксимацій МСЕ на рівномірно згущуваних триангуляціях

i	$N(\mathfrak{S}_i)$	$Card(\mathfrak{S}_i)$	$\delta_i, \%$	$\delta_i^{Ext}, \%$	p	p^{Ext}	k	$\ u_i\ $	T
0	25	36	348.1	138.7			3.0	6.762	0.135
	85		96.1	106.2			1.0	6.007	0.120
	181		52.1	77.3			0.7	5.739	0.170
1	85	144	173.5	114.3	1.3	0.3	1.5	5.719	0.081
	313		72.1	81.6	0.5	0.4	0.9	5.726	0.270
	685		37.4	50.3	0.5	0.6	0.7	5.699	0.399
2	313	576	86.9	99.3	1.0	0.2	0.9	5.701	0.225
	1 201		39.9	57.2	0.7	0.5	0.7	5.701	0.530
	2 655		16.6	26.9	1.2	0.9	0.6	5.696	1.227
3	1 201	2 304	44.3	80.0	1.0	0.3	0.6	5.702	0.797
	4 705		16.7	33.1	1.3	0.8	0.5	5.696	2.195
	10 513		4.4	10.6	1.9	1.3	0.4	5.695	8.264
4	4 705	9 216	22.7	55.4	1.0	0.5	0.4	5.699	3.474
	18 625		5.7	14.3	1.5	1.2	0.4	5.695	17.627
	41 761		0.8	2.7	2.5	2.0	0.3	5.695	56.151
5	18 625	36 864	11.5	32.2	1.0	0.8	0.4	5.696	16.747
	74 113		1.7	4.6	1.8	1.6	0.4	5.695	88.436
	166 465		0.1	0.5	2.8	2.6	0.2	5.695	289.976
6	74 113	147 456	5.8	16.9	1.0	0.9	0.3	5.695	83.261
	295 681		0.4	1.3	2.0	1.9	0.3	5.695	525.03
7	295 681	589 824	2.9	8.6	1.0	1.0	0.3	5.695	280.622
	1 181 185		0.1	0.3	2.0	2.0	0.3	5.695	3479.03
8	1 181 185	2 359 296	1.5	4.3	1.0	1.0	0.3	5.695	1109.33
9	4 721 665	9 437 184	0.7	2.1	1.0	1.0	0.3	5.695	15672.75

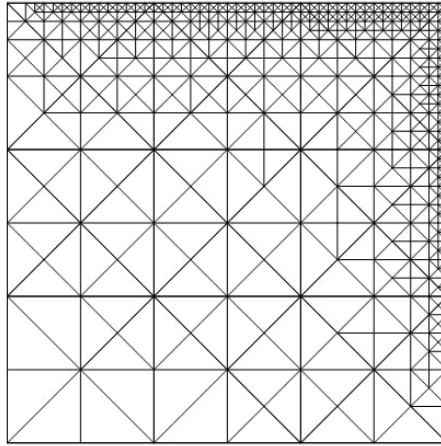
з $TOL = 1\%$. Рис. 4 демонструє кусково кубічну апроксимацію, обчислену на четвертому кроці адаптування на проміжній сітці зі 299 скінченних елементів (рівень відносної похибки 16.6%).

Деякі характеристики наближень, обчислених на послідовності рівномірно згущуваних сіток до досягнення точності з допустимою похибкою $TOL = 1\%$, подано в табл. 1. Тут i – крок згущення сітки, \mathfrak{S}_i – триангуляція обчислена на i -му кроці згущення, $N(\mathfrak{S}_i)$ – кількість вузлів триангуляції \mathfrak{S}_i , $Card_i = Card(\mathfrak{S}_i)$ – кількість елементів триангуляції \mathfrak{S}_i , $\delta_i = \|\varepsilon_i\| \cdot \|u_i\|^{-1} 100\%$ та $\delta_i^{Ext} = \|e_i\| \cdot \|u\|^{-1} 100\%$ – відносні похибки апроксимації, обчислені з використанням норм простору $H^1(\mathfrak{S}_i)$,

$$p = 2 \ln(\|\varepsilon_i\| \cdot \|\varepsilon_{i+1}\|^{-1}) / \ln(Card_{i+1} Card_i^{-1}),$$

$$p^{Ext} = 2 \ln(\|e_i\| \cdot \|e_{i+1}\|^{-1}) / \ln(Card_{i+1} Card_i^{-1})$$

– порядки швидкості збіжності АОП та істинної похибки, обчислені з використанням

Рис. 7. Кубічні апроксимації, $\text{Card}(\mathfrak{S}_8) = 869$

біжучої і попередньої сітки, $k = \|\varepsilon_i\| \cdot \|e_i\|^{-1}$ – індекс ефективності АОП,

$$\|u_i\|^2 = \int_{\Omega} (u_i^2 + |\nabla u_i|^2) dx$$

– норма апроксимації обчислена в просторі $H^1(\mathfrak{S}_i)$, T – сумарний час (в секундах), необхідний для здійснення однієї ітерації (формування та розв’язання системи лінійних алгебричних рівнянь, обчислення індикаторів похибок і згущення сітки). Для кожного кроку i у першому рядку подано результати обчислень з кусково лінійними апроксимаціями, другому і третьому – квадратичними та кубічним, відповідно (якщо такі виконувалися).

Наближені розв’язки з задовільною точністю отримано за 9 кроків рівномірного згущення сітки, яка містить 9437184 трикутників з лінійною апроксимацією, за 7 кроків на сітці зі 598824 скінченних елементів з квадратичною апроксимацією та за 5 кроків на сітці зі 36864 скінченних елементів з кубічною апроксимацією.

Зауважимо, що швидкість збіжності кожної з обчислених послідовностей наближень характеризується показниками, які дуже добре узгоджуються асимптотичними значеннями, які передбачені апріорними оцінками з використанням норм простору Соболева $H^1(\Omega)$. Заразом усі вжиті АОП обчислюють на рівномірно згущуваних сітках нижні межі істинної похибки з індексами ефективності, значення яких коливаються в околі величини 0.3.

Відповідні характеристики послідовностей h -адаптивних наближень подано в табл. 2. Щоб обчислити наближені розв’язки з заданою точністю, h -адаптивна схема з лінійними апроксимаціями витратила 18 кроків адаптування сітки, з квадратичними апроксимаціями – 11 кроків, з кубічними апроксимаціями – 8 кроків. Зазначимо, що порядки збіжності істинних похибок та АОП всіх адаптивних апроксимацій вищі (часом значно вищі!) від теоретично очікуваних. Це явище відоме в літературі під назвою *суперзбіжності*. Також варто зазначити, що для досягнення заданого рівня точності h -адаптивні схеми потребують в рази менше скінченних елементів, ніж при рівномірному згущенні сітки. Рис. 5-7 демонструють остаточні сітки скінченних елементів, сконструйовані h -адаптивними схемами. Доб-

Таблиця 2

АОП і порядки збіжності h -адаптивних апроксимацій

i	$N(\mathfrak{S}_i)$	$Card(\mathfrak{S}_i)$	$\delta_i, \%$	$\delta_i^{Ext}, \%$	p	p^{Ext}	k	$\ u_i\ $	T
0	25	36	348.1	138.7			3.0	6.762	0.141
	85		96.1	106.2			1.0	6.007	0.195
	181		52.1	77.3			0.7	5.739	0.416
1	49	72	251.1	143.7	0.8	-0.1	2.2	7.104	0.181
	169	72	81.0	104.3	0.5	0.1	0.8	5.906	0.249
	349	70	48.8	75.9	0.2	0.1	0.7	5.731	0.725
2	85	144	173.5	114.3	1.7	0.6	1.5	5.719	0.247
	313	143	72.1	81.6	0.4	0.7	0.9	5.686	0.338
	649	136	37.4	50.3	0.8	1.2	0.7	5.699	0.861
3	168	287	130.0	114.5	0.8	0.0	1.2	5.791	0.328
	596	277	42.3	76.7	1.6	0.2	0.6	5.709	0.358
	946	198	26.2	45.0	1.9	0.6	0.6	5.698	1.233
4	310	570	86.9	99.3	1.2	0.4	0.9	5.701	0.513
	912	435	39.9	57.2	0.3	1.3	0.7	5.694	0.529
	1 402	299	16.6	26.9	2.2	2.5	0.6	5.696	1.951
5	446	816	64.8	94.5	1.6	0.3	0.7	5.707	0.625
	1 328	631	20.6	46.4	3.6	1.1	0.4	5.698	0.764
	1 981	420	9.9	18.7	3.0	2.2	0.5	5.695	2.295
6	693	1 308	44.3	80.0	1.6	0.7	0.6	5.697	0.756
	1 763	848	16.7	33.1	1.5	2.3	0.5	5.695	0.904
	2 575	552	4.4	10.6	5.9	4.1	0.4	5.695	3.498
7	954	1 782	32.5	66.2	2.0	1.2	0.5	5.701	0.958
	2 362	1 125	8.4	20.7	4.9	3.3	0.4	5.695	1.279
	3 349	711	2.4	4.9	4.7	6.0	0.5	5.695	3.763
8	1 235	2 344	22.7	55.4	2.6	1.3	0.4	5.696	1.202
	2 958	1 423	5.7	14.3	3.2	3.2	0.4	5.695	1.685
	4 060	869	0.8	2.7	10.9	6.0	0.3	5.695	1.670
9	1 633	3 049	16.3	38.2	2.5	2.8	0.4	5.698	1.468
	4 003	1 904	2.7	6.8	5.2	5.1	0.4	5.695	2.491
	2 152	4 083	11.5	32.2	2.4	1.2	0.4	5.696	1.870
10	5 017	2 410	1.7	4.7	4.1	3.3	0.4	5.695	4.494
	3 157	5 917	8.2	19.8	1.8	2.6	0.4	5.695	2.816
	6 556	3 113	0.8	2.6	5.9	4.7	0.3	5.695	3.935
12	4 743	9 083	5.8	16.9	1.6	0.7	0.3	5.695	4.004
13	7 584	14 431	4.1	9.9	1.5	2.3	0.4	5.695	6.437
14	11 918	23 089	2.9	8.6	1.5	0.6	0.3	5.695	10.844
15	19 161	36 972	2.1	5.0	1.4	2.3	0.4	5.695	18.175
16	29 344	57 307	1.5	4.4	1.5	0.6	0.3	5.695	27.445
17	44 161	85 978	1.1	2.8	1.4	2.2	0.4	5.695	43.028
18	61 177	119 917	0.9	2.5	1.4	0.7	0.4	5.695	66.135

ре видно, що з певного кроку локальне поліпшення триангуляцій стосується лише зони примежового шару розв'язку задачі, що ще раз свідчить про обчислювальну

ефективність і надійність цих схем.

Таблиця 3

Сумарні затрати часу на обчислення послідовностей кусково-поліноміальних апроксимацій, $TOL = 1\%$

Апроксимації	Час при рівномірному згущенні сітки	Час при h -адаптуванні
Лінійні	17167.422	187.173
Квадратичні	4113.238	17.221
Кубічні	356.187	16.412

Таблиця 4

Характеристики одержані при обчисленні кусково-поліноміальних апроксимацій МСЕ на рівномірно згущуваних сітках, $TOL = 1\%$

i	$N(\mathfrak{S}_i)$	$Card(\mathfrak{S}_i)$	$\delta_i, \%$	$\delta_i^{Ext}, \%$	p	p^{Ext}	k	$\ u_i\ $	T
9	4 721 665	9 437 184	0.7	2.1	1.0	1.0	0.3	5.695	15672.75
7	1 181 185	589 824	0.1	0.3	2.0	2.0	0.3	5.695	3479.03
5	166 465	36 864	0.1	0.5	2.8	2.6	0.2	5.695	289.976

Таблиця 5

Характеристики одержані при обчисленні кусково-поліноміальних апроксимацій МСЕ на локально згущуваних сітках, $TOL = 1\%$

i	$N(\mathfrak{S}_i)$	$Card(\mathfrak{S}_i)$	$\delta_i, \%$	$\delta_i^{Ext}, \%$	p	p^{Ext}	k	$\ u_i\ $	T
18	61 177	119 917	0.9	2.5	1.4	0.7	0.4	5.695	66.135
11	6 556	3 113	0.8	2.6	5.9	4.7	0.3	5.695	3.935
8	4 060	869	0.8	2.7	10.9	6.0	0.3	5.695	1.670

Як і очікувалося, h -адаптивні кубічні апроксимації демонструють деякі переваги над квадратичними та лінійними, бо для досягнення заданого рівня похибки $TOL = 1\%$ з використанням кубічних апроксимацій система МСЕ потребувала обчислення та розв'язання 4060 рівнянь, з квадратичними апроксимаціями – 6556 рівнянь (що в півтора рази більше), а з використанням лінійних – 61117 рівнянь (що в п'ятнадцять разів більше від кубічних апроксимацій).

У табл. 3 подано сумарні затрати часу для розв'язання задачі з досягненням заданої відносної похибки з $TOL = 1\%$. Загальні затрати часу кусково лінійних апроксимацій становлять майже 5 годин обчислень з рівномірним згущенням сітки, трохи більше години для квадратичних і близько 6 хвилин для кубічних, що у

50 разів швидше ніж для лінійних апроксимацій та в 10 разів швидше ніж для квадратичних. При h -адаптивному згущенні сітки час для розв'язання задачі скоротився в кілька десятків разів для всіх трьох ґатунків апроксимацій, причому переваги кубічних апроксимацій над квадратичними за цією часовою характеристикою видаються несуттєвими.

У табл. 4 і 5 наведено порівняння результатів апроксимацій різних порядків.

11. ВИСНОВКИ

Розглянуто методику знаходження числових розв'язків двовимірних крайових задач дифузії-адвекції-реакції, в тім числі і сингулярно збурених, за допомогою кусково-поліноміальних (лінійних, квадратичних або кубічних) апроксимацій МСЕ на трикутниках, а також їхніх h -адаптивних версій на підставі відповідних поелементно визначених поліноміальних АОП і стратегій локального поліпшення триангуляцій методом бісекцій. Він простий у реалізації і гарантує збіжність процесу h -адаптування, бо дає змогу конструювати послідовність вкладених підпросторів апроксимацій, що також гарантує збіжність обчислених наближень до точного розв'язку задачі.

Сконструйовані АОП дають змогу швидко, надійно й ефективно обчислювати оцінки похибок апроксимацій МСЕ на рівномірних і на локально поліпшуваних сітках. Особливостями пропонованих АОП є придатність для надійного контролю похибок у процесі обчислень апроксимацій МСЕ та можливість використання їхніх індикаторів для адаптування триангуляцій. Використаний критерій адаптування сітки у всіх схемах орієнтований на досягнення рівномірного розподілу похибок не вище заданого рівня на усіх скінченних елементах сітки. Обчислювальні експерименти підтверджують надійність та ефективність пропонованих апостеріорних оцінювачів похибок та їхнього застосування в системах керування процесами локального адаптування біжучих триангуляцій.

Як засвідчив аналіз числових результатів, кусково квадратичні та кубічні апроксимації МСЕ дають змогу одержувати якісні наближення з набагато меншими обчислювальними витратами, ніж лінійні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вовк О.В. Числове моделювання нелінійних еволюційних задач дифузії-адвекції-реакції: дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: 01.01.07 / О.В. Вовк. – Львів, 2016. – 218 с.
2. Трушевський В.М. Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі. Теоретичні аспекти та застосування. – / В.М. Трушевський, Г.А. Шинкаренко, Н.М. Щербина. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2014. – 394 с.
3. Ainsworth M. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis / M. Ainsworth, J.T. Oden. – New-York: Wiley, 2000. – 240 p.
4. Babuska I. Finite elements: an introduction to the method and error estimation / I. Babuska, J. Whiteman, T. Strouboulis. – Oxford: Oxford University Press, 2011.
5. Mitchell W.E. A comparison of adaptive refinement techniques for elliptic problems / W.E. Mitchell // ACM Trans. Math. Software. – 1989. – № 15. – P. 327–346.
6. Ostapov O.Yu. A posteriori error estimator for diffusion-advection-reaction boundary value problems: piecewise linear approximation on triangles / O.Yu. Ostapov, H.A. Shynkarenko // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – Vol. 2. – P. 111–123.

7. Ostapov O.Yu. A posteriori error estimator and h -adaptive finite element method for diffusion-advection-reaction problems / O.Yu. Ostapov, H.A. Shynkarenko, O.V. Vovk // Recent Advances in Computational Mechanics, London, Taylor & Francis Group. – 2014. – P. 329–337.
8. Verfurth R. A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods / R. Verfurth. – Oxford: Oxford University Press, 2013.
9. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Sixth edition / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. – Oxford: Oxford University Press, 2005. – 733 p.

Стаття: надійшла до редколегії 23.09.2023

доопрацьована 06.10.2023

прийнята до друку 27.10.2023

A POSTERIORI ERROR ESTIMATORS AND h -ADAPTIVE PIECEWISE-POLYNOMIAL APPROXIMATIONS ON TRIANGLE FINITE ELEMENTS

H. Shynkarenko, V. Tanchynets, O. Vovk

*Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: vasyl.tanchynets@lnu.edu.ua*

This paper is devoted the qualified solution of singularly perturbed two-dimensional diffusion-advection-reaction boundary value problem by using finite element method. Our numerical schemes use piecewise linear or piecewise quadratic or piecewise cubic approximations on triangular finite element meshes. In each of these cases to control the accuracy of the computed finite element approximations we suppose elementwise polynomial a posteriori error estimators, which allow reliable calculate the lower bounds of the true finite element errors. Each used estimator is a specific polynomial of an order higher than the approximation it estimates. These estimators define control systems for h -adaptive finite element schemes, which locally refine triangulations by using a bisection method. The latter constructs a sequence of nested meshes, which in turn guarantees the convergence of the finite element approximations with a predetermined error tolerance. The superconvergence, reliability and efficiency of the proposed h -adaptive finite element schemes are illustrated by the numerical modeling results.

Key words: diffusion-advection-reaction problem, finite element method, a posteriori error estimator, h -adaptive scheme, bisection method.