УДК 519.6 *doi: 10.30970/vam.2023.31.00000*

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ РЕКОНСТРУКЦІЇ МЕЖІ ДЛЯ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЕЛАСТОСТАТИКИ У ДВОЗВ'ЯЗНІЙ ОБЛАСТІ

М. Власюк

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: mariia.vlasiuk@lnu.edu.ua

Еластостатика досліджує й описує процеси лінійної пружності, що виникають у різних задачах фізики й механіки. Плоска нелінійна обернена задача, яку розглядаємо, полягає у реконструкції однієї межі тіла за заданими даними Коші на іншій межі, або частині цієї межі. Задача нестійка. Це виявляється у тому, що немає стійкості за вхідними даними. Досліджено ідентифіковність внутрішньої границі, а також наведено зведення задачі до нелінійної системи інтегральних рівнянь. Отримана система параметризована та лінеаризована з використанням похідних Фреше. Описано ітераційний алгоритм розв'язування задачі. Деякі інтеграли містять особливості, які були виділені адитивно у формі спеціальних вагових функцій. Висвітлено дискретизацію системи методом квадратур і застосування до перевизначеної та погано зумовленої системи методу найменших квадратів. У підсумку початкову задачу зведено до повністю дискретної системи лінійних рівнянь. Розв'язавши цю систему, ми змогли реконструювати вигляд внутрішньої кривої. Чисельні експерименти демонструють ефективність методу не лише для точних вхідних даних, а й для збурених даних із певним рівнем шуму.

Ключові слова: еластостатика, обернена задача, нелінійна задача, метод інтергальних рівнянь, тригонометричні квадратури, двозв'язна область.

1. Вступ

Ми пропонуємо один із способів чисельної апроксимації нелінійної оберненої задачі еластостатики. У [9] запропоновано кілька ітераційних методів для розв'язування нелінійних задач за допомогою нелінійних інтегральних рівнянь. Загальний алгоритм розв'язування для областей із включеннями та тріщинами висвітлено у [7]. У [1] наведено застосування методу IP до задачі реконструкції межі у двозв'язній області для випадку рівняння Лапласа. Схожий підхід із використанням інтегральних рівнянь для розв'язування обернених задач для рівння Лапласа наведено у [2], [3]. Із способами розв'язуванням задачі Коші для рівняння еластостатики можна ознайомитись у [4], [5].

Ми розглядаємо задачу у двовимірний двозв'язній області $D \subset \mathbb{R}^2$, яка обмежена гладкими замкненими кривими Γ_1 і Γ_2 в $\mathbb{R}^2$, що не мають спільних точок і самоперетинів. З фізичного погляду, можна вважати, що область заповнена твердим ізотропним пружним матеріалом. Контур Γ_2 можна трактувати як доступну границю тіла, а контур Γ_1 – як недоступну.

Пряма задача еластостатики полягає у знаходженні такої вектор–функції $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, що задовольняє рівняння Нав'є

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div} u = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{1}$$

© Власюк М., 2023

однорідну умову Діріхле на внутрішній кривій

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \tag{2}$$

та неоднорідну умову Діріхле на зовнішній кривій

$$u = f \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{3}$$

де f – задана достатньо гладка функція.

Плоска нелінійна обернена задача полягає у *реконструкції* внутрішньої недоступної замкненої кривої Γ_1 в $\mathbb{R}^2$, коли відомо вигляд зовнішньої кривої Γ_2 в $\mathbb{R}^2$, задано значення даних Діріхле (2), (3) на внутрішній і зовнішній границях, відповідно, а також дані Неймана на зовнішній межі

$$Tu = g \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{4}$$

де T – оператор напружень, який визначений формулою

$$Tu = \lambda \operatorname{div} u\, \nu + 2\mu(\nu \cdot \operatorname{grad})u + \mu \operatorname{div}(Qu)Q\nu.$$

Тут ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі, Q – так звана матриця повороту, що має вигляд

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Накладемо додаткові припущення стосовно гладкості межі та вхідних даних, щоб забезпечити існування оператора T на Γ_2. Нехай $\Gamma_2 \in C^2$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$, $f \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, а також $f \neq 0$.

Оскільки задача реконструкції межі нелінійна, важливо дослідити її щодо єдиності розв'язку, а саме – однозначної ідентифіковності Γ_1 за заданими даними Коші на Γ_2. Ці властивості висвітлено у теоремі.

Теорема 1. *Нехай $\widetilde{D}$ та D – це дві обмежені області зі спільною зовнішньою межею Γ_2 і внутрішніми межами $\widetilde{\Gamma}_1$ та Γ_1; $\tilde{u}$ та u – розв'язки задачі Діріхле* (1)–(3) *в $\widetilde{D}$ та D, відповідно. Припустимо, що $f \neq 0$ та*

$$Tu = T\tilde{u}$$

на $\Sigma \subseteq \Gamma_2$. ***Тоді***

$$\Gamma_1 = \widetilde{\Gamma}_1.$$

Доведення теореми аналогічне як для рівняння Лапласа та наведено у [9].

2. Зведення задачі до системи нелінійних інтегральних рівнянь

Відомо, що фундаментальний розв'язок рівняння еластостатики має вигляд

$$\Phi(x, y) = \frac{C_1}{2\pi}\Psi(x, y)I + \frac{C_2}{2\pi}J(x - y), \tag{5}$$

де

$$C_1 = \frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad C_2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)},$$

$$\Psi(x,y) = \ln \frac{1}{|x-y|}, \quad x,y \in \mathbb{R}^2 \quad x \neq y.$$

I – одинична матриця розмірності 2×2, J визначено за формулою

$$J(\omega) = \frac{\omega\omega^\top}{|\omega|^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\overline{0}\}.$$

З виведенням фундаментального розв'язку можна ознайомитись у [10].

Для вектор-функції $U \in H^1(D)$, що задовольняє рівняння Нав'є (1), визначимо функціонал

$$\mathcal{G}(U) = \int_{\Gamma_2} (TUf - Ug)\, ds, \tag{6}$$

де f та g – задані вектор-функції з (3) та (4), відповідно. Тоді за наслідком з другої теореми Гріна для випадку рівняння еластостатики (наведено у [10]) отримаємо, що

$$\mathcal{G}(U) = \int_{\Gamma_1} Uh ds. \tag{7}$$

Тут $h = Tu$ і визначає напруження на внутрішній межі.

Легко пересвідчитись, що фукціонал (6) може бути визначений для всіх

$$U \in \operatorname{span}\{\Phi_i(x,\cdot) : x \in \Gamma_1\}, \quad i = 1,2,$$

де Φ_i – i-й стовпець матриці фундаментальних розв'язків рівняння Нав'є. Очевидно, що у випадку однозв'язної області, функціонал $\mathcal{G}$ тотожно рівний нулю.

Використовуючи фукнціонал (6), можна отримати нелінійну систему інтегральних рівнянь для знаходження невідомих (Γ_1, h). Для цього можна подіяти функціоналом $\mathcal{G}$ на стовпці фундаментального розв'язку (5) з відповідно визначеними аргументами.

Використовуючи (6) та (7), введемо їхні відповідники з фундаментальним розв'язком. Для цього визначимо потенціал простого та подвійного шару по зовнішній межі, де густинами є задані вектор-функції f та g,

$$w(x) = \int_{\Gamma_2} \left\{ [T_y \Phi(x,y)]^\top f(y) - \Phi(x,y) g(y) \right\} ds(y), \; x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_2$$

і потенціал простого шару по внутрішній межі з невідомою густиною h

$$v(x) = \int_{\Gamma_1} \Phi(x,y) h(y) ds(y), \; x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_1.$$

Також введемо до розгляду дещо видозмінені потенціали

$$\tilde{w}(x) = w(x) - [I - \Phi(x,\overline{0})] \int_{\Gamma_2} g(y) ds(y), \; x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\Gamma_2 \cup \{\overline{0}\}\}, \tag{8}$$

$$\tilde{v}(x) = v(x) + [I - \Phi(x,\overline{0})] \int_{\Gamma_1} h(y) ds(y), \; x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\Gamma_1 \cup \{\overline{0}\}\}. \tag{9}$$

Зазначимо, що потенціали (8), (9) є обмеженими.

Визначимо оператори $S_\ell : L_2(\Gamma_1) \to L_2(\Gamma_\ell)$

$$(S_\ell h)(x) = \int_{\Gamma_1} \Phi(x,y)h(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_\ell,$$

а також оператор для модифікованого потенціалу (9)

$$(\tilde{S}_2 h)(x) = (S_2 h)(x) + [I - \Phi(x,\overline{0})] \int_{\Gamma_1} h(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_2.$$

Щоб отримати систему, використаємо фукнціонал (6). Виберемо один набір функцій з точками джерела в D_2 та інший набір з точками в D_1. Тоді спрямуємо точки джерела до Γ_2 та Γ_1, відповідно. Можна переконатись, що справджується така теорема.

Теорема 2. *Обернена гранична задача* (1)–(4) *є еквівалентною до системіи нелінійних інтегральних рівнянь*

$$(S_1 h)(x) = w(x), \quad x \in \Gamma_1, \tag{10}$$

$$(\tilde{S}_2 h) = \tilde{w}(x), \quad x \in \Gamma_2. \tag{11}$$

Доведення аналогічне до наведеного у [9]. Схожий підхід зведення задачі до системи нелінійних рівнянь також висвітлено у [1, 7, 9].

3. Параметризація інтегральних операторів і похідних

Для чисельного розв'язування системи IP, перейдемо від інтегралів по кривій до визначених інтегралів. Припустимо, що криві Γ_1 і Γ_2 можна подати у параметричному вигляді

$$\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)), \quad t \in [0, 2\pi]\}, \quad i = 1, 2,$$

де x_{i1}, x_{i2} – 2π–періодичні та двічі неперервно диференційовні функції. Для спрощення розрахунків розглянемо випадок, коли внутрішня крива з класу так званих зіркових кривих і має параметричне подання

$$x_1(t) = r(t)(\cos t, \sin t),$$

де $r : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ – радіальна відстань від початку координат, яку треба обчислити.

Використовуючи параметричне подання кривих, отримаємо параметризовані інтегральні оператори, що виконують відображення $L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$

$$(S_i \varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{i1}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad i = 1, 2,$$

$$(\tilde{S}_2 \varphi)(t) = (S_2 \varphi)(t) + \left[I - \Phi(x_2(t), \overline{0})\right] \int_0^{2\pi} \varphi(\tau)d\tau.$$

Також наведемо параметризовані потенціали

$$w_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{N_{i2}(t,\tau)f_2(\tau) - K_{i2}(t,\tau)g_2(\tau)\}\, d\tau + \\ + \frac{1-i}{2} \frac{f_2(t)}{|x_2'(t)|}, \quad i = 1, 2,$$

$$\tilde{w}_2(t) = w_2(t) - \left[I - \Phi(x_2(t), \overline{0})\right] \int_0^{2\pi} g_2(\tau) d\tau.$$

Тут ввели позначення

$$\varphi(t) = \varphi(x_1(t))|x_1'(t)|,$$
$$f_2(t) = f(x_2(t))|x_2'(t)|, \quad g_2(t) = g(x_2(t))|x_2'(t)|,$$
$$w_i(t) = w(x_i(t)), \quad \tilde{w}_2(t) = \tilde{w}(x_2(t)),$$
$$K_{ij}(t,\tau) = 2\pi\Phi(x_i(t), x_j(\tau)),\ N_{ij}(t,\tau) = 2\pi \left[T_{x_j(\tau)}\Phi(x_i(t), x_j(\tau))\right]^\top.$$

Подіявши оператором T на матрицю фундаментальних розв'язків Φ по другому аргументу, отримаємо явний вигляд ядер N_{ij}

$$N_{ij}(t,\tau) = \frac{1}{|x_j'(\tau)|}\left\{M_{ij}^1(t,\tau) + M_{ij}^2(t,\tau)\right\}^\top, \quad i,j = 1,2,$$

де

$$M_{ij}^2(t,\tau) = \begin{cases} -\frac{x_i'(t)\cdot Q x_i''(t)}{2|x_i'(t)|^2}\left[C_3 I + C_4 \widetilde{J}(x_i(t), x_i(t))\right], & i = j,\ t = \tau, \\ \frac{(x_i(t) - x_j(\tau))\cdot Q x_j'(\tau)}{|x_i(t) - x_j(\tau)|^2}\left[C_3 I + C_4 \widetilde{J}(x_i(t), x_j(\tau))\right], \end{cases}$$

інакше

$$M_{ij}^1(t,\tau) = C_3 \frac{(x_i(t) - x_j(\tau))\cdot x_j'(\tau)}{|x_i(t) - x_j(\tau)|^2} Q, \quad i \neq j,$$

Введемо позначення для множників у матрицях $M_{ij}^1(t,\tau)$ та $M_{ij}^2(t,\tau)$, щоб уникнути громіздкості у подальших викладах

$$m_{ij}^1(t,\tau) = \frac{(x_i(t) - x_j(\tau))\cdot x_j'(\tau)}{|x_i(t) - x_j(\tau)|^2},$$

$$m_{ij}^2(t,\tau) = \frac{(x_i(t) - x_j(\tau))\cdot Q x_j'(\tau)}{|x_i(t) - x_j(\tau)|^2}.$$

Аналогічні результати обчислення дії оператора напружень на фундаментальний розв'язок було отримано у [10], [4] і [6].

Очевидно, що ядра K_{ii}, N_{ii} (для $i = 1,2$) містять сингулярності, тому відповідні інтеграли треба трактувати як невластиві.

Наведені оператори та потенціали залежать від функції r. Використаємо позначення $S_j(r,\varphi)$, $\tilde{S}_2(r,\varphi)$, $w_j(r)$, щоб наголосити на цьому. Легко бачити, що $\tilde{w}_2$ від r не залежить. Враховуючи ці оновлення, систему (10)–(11) можна записати у вигляді

$$S_1(r,\varphi) = w_1(r), \tag{12}$$
$$\tilde{S}_2(r,\varphi) = \tilde{w}_2. \tag{13}$$

Система (12)–(13) – нелінійна. Можна позбутися нелінійності стосовно кривої Γ_1, а саме стосовно радіальної функції r, застосувавши лінеаризацію, де певна функція q буде визначати поправку до r у вигляді $r := r + q$. Для цього попередньо треба обчислити похідні Фреше від нелінійних операторів $S_1(r,\varphi)$, $\tilde{S}_2(r,\varphi)$ та потенціалу $w_1(r)$ стосовно r. Їх можна обчислити явно, продиференціювавши елементи ядра за

напрямом q. Із детальнішим застосуванням наведеного підходу можна ознайомитись у [7] і [9]. Похідні матимуть вигляд

$$w_1'(r;q)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)\Big\{N_{12}'(t,\tau)f_2(\tau) - K_{12}'(t,\tau)g_2(\tau)\Big\}d\tau,$$

$$S_1'(r,\varphi;q)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{q(t)K_{11}'(t,\tau) + q(\tau)K_{11}'(\tau,t)\Big\}\varphi(\tau)d\tau,$$

$$\tilde{S}_2'(r,\varphi;q)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)K_{21}'(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Тут ми ввели позначення

$$K_{1j}'(t,\tau) = -\frac{(x_1(t)-x_j(\tau))\cdot c(t)}{|x_1(t)-x_j(\tau)|^2}\Big\{C_1\, I + 2C_2\,\widetilde{J}(x_1(t),x_j(\tau))\Big\}+$$

$$+\frac{C_2}{|x_1(t)-x_j(\tau)|^2}\,H_{1j}(t,\tau), \qquad j=1,2,$$

$$H_{1j}(t,\tau) = \begin{pmatrix} 2(x_{11}(t)-x_{j1}(\tau))\cos t & (x_1(t)-x_j(\tau))\cdot\tilde{c}(t) \\ (x_1(t)-x_j(\tau))\cdot\tilde{c}(t) & 2(x_{12}(t)-x_{j2}(\tau))\sin t \end{pmatrix},$$

$$c(t) = (\cos t, \sin t), \quad \tilde{c}(t) = (\sin t, \cos t).$$

Ядра N_{1j}' обчислюватимемо за формулою

$$N_{1j}'(t,\tau) = \frac{1}{|x_j'(\tau)|\,|x_1(t)-x_j(\tau)|^2}\Big\{{M_{1j}^1}'(t,\tau) + {M_{1j}^2}'(t,\tau)\Big\}^{\top},$$

$$j=1,2,$$

де матриці ${M_{1j}^1}'$ та ${M_{1j}^2}'$ визначені так:

$${M_{1j}^1}'(t,\tau) = C_3\left\{\big(x_j'(\tau) - 2m_{1j}^1(t,\tau)(x_1(t)-x_j(\tau))\big)\cdot c(t)\right\}Q,$$

$${M_{1j}^2}'(t,\tau) = \big(Qx_j'(\tau) - 2m_{1j}^2(t,\tau)(x_1(t)-x_j(\tau))\big)\cdot c(t)\times$$

$$\times\Big[C_3 I + C_4\widetilde{J}(x_1(t),x_j(\tau))\Big] + C_4 m_{1j}^2(t,\tau)\times$$

$$\times\Big[H_{1j}(t,\tau) - 2(x_1(t)-x_j(\tau))\cdot c(t)\widetilde{J}(x_1(t),x_j(\tau))\Big].$$

Можна пересвідчитись, що справджується властивість

$$K_{21}'(t,\tau) = K_{12}'(\tau,t).$$

Перейшовши до границі при $\tau\to t$, легко бачити, що ядро оператора $S_1'(r,\varphi;q)$ є неперервним і має вигляд

$$\boldsymbol{K_{11}'}(q;t) = \lim_{\tau\to t}\Big\{q(t)K_{11}'(t,\tau) + q(\tau)K_{11}'(\tau,t)\Big\} =$$

$$= \frac{C_2}{|x_1'(t)|^2}\,H_{11}'(t) - \frac{z(t)\cdot x_1'(t)}{|x_1'(t)|^2}\Big\{C_1\, I + 2C_2\,\widetilde{J}(x_1(t),x_i(t))\Big\},$$

де ввели позначення

$$H'_{11}(t) = \begin{pmatrix} 2z_1(t)x'_{11}(t) & z(t)\cdot x'_1(t)) \\ z(t)\cdot x'_1(t) & 2z_2(t)x'_{12}(t) \end{pmatrix},$$

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t)),$$

$$z_1(t) = q(t)'\cos t - q(t)\sin t, \quad z_2(t) = q(t)'\sin t + q(t)\cos t.$$

4. Виділення особливостей

Ядра K_{ii} і N_{ii} містять сингулярності, які можна виділити адитивним способом у формі спеціальних вагових функцій. Для цього визначимо ці ядра як

$$K_{ii}(t,\tau) = \widetilde{K}_i(t,\tau) - \frac{C_1}{2}\ln\left\{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right\}I, \quad i = 1,2.$$

Використовуючи розклад в ряд Тейлора та правило Лопіталя, можна довести, що компоненти $\widetilde{K}_i$ є неперервними при $t = \tau$, їхня гладкість залежить від гладкості граничних кривих. $\widetilde{K}_i$ обчислюватимемо за формулою

$$\widetilde{K}_i(t,\tau) = \begin{cases} K_{ii}(t,\tau) + \frac{C_1}{2}\ln\left\{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right\}I, & t \neq \tau, \\ \frac{C_1}{2}\ln\frac{1}{e|x'_i(t)|^2}I + C_2\widetilde{J}(x_i(t), x_i(t)), & t = \tau, \end{cases}$$

де

$$\widetilde{J}(x_i(t), x_j(\tau)) = \begin{cases} \frac{x'_i(t)\left[x'_i(t)\right]^\top}{|x'_i(t)|^2}, & i = j,\ t = \tau, \\ J(x_i(t) - x_j(\tau)), & \text{інакше.} \end{cases}$$

Легко пересвідчитись, що у ядрах N_{ii} компоненти M^2_{ii} достатньо гладкі, тоді як M^1_{ii} містять сингулярність. Щоб виділити її, позначимо

$$M^1_{ii}(t,\tau) = M^3_i(t,\tau) + \frac{C_3}{2}\cot\frac{t-\tau}{2}Q, \quad i = 1,2.$$

Тоді виконуються співвідношення

$$M^3_i(t,\tau) = \begin{cases} M^1_{ii}(t,\tau) - \frac{C_3}{2}\cot\frac{t-\tau}{2}Q, & t \neq \tau, \\ -\frac{C_3}{2}\frac{x'_i(t)\cdot x''_i(t)}{|x'_i(t)|^2}Q, & t = \tau. \end{cases}$$

У підсумку отримаємо загальну формулу

$$N_{ii}(t,\tau) = \widetilde{N}_i(t,\tau) + \frac{C_3}{2|x'_i(\tau)|}\cot\frac{t-\tau}{2}Q^\top, \quad i = 1,2,$$

де правильна рівність

$$\widetilde{N}_i(t,\tau) = \begin{cases} N_{ii}(t,\tau) - \frac{C_3}{2|x'_i(\tau)|}\cot\frac{t-\tau}{2}Q^\top, & t \neq \tau, \\ \frac{1}{|x'_i(t)|}\left\{M^3_i(t,t) + M^2_{ii}(t,t)\right\}^\top, & t = \tau. \end{cases}$$

Тепер, врахувавши всі наведені вище перетворення, можемо застосувати чисельні методи для обчислення визначених інтегралів з гладкими ядрами та інтегралів, де зосереджені особливості.

5. Чисельне розв'язування системи інтегральних рівнянь

5.1. Ітераційний алгоритм

Виконавши лінеаризацію системи (12)–(13), отримаємо таке її лінійне подання:

$$S_1(r,\varphi) + S_1(r,\psi) + S_1'(r,\varphi;q) = w_1(r) + w_1'(r;q), \tag{14}$$

$$\tilde{S}_2(r,\varphi) + \tilde{S}_2(r,\psi) + \tilde{S}_2'(r,\varphi;q) = \tilde{w}_2. \tag{15}$$

Опишемо алгоритм *ітераційної процедури* для знаходження розв'язку (14)–(15).

– Обрати довільне початкове наближення r. Розв'язати коректну задачу

$$S_1\varphi = w_1$$

стосовно φ.
– Для заданих r і φ розв'язати задачу (14)–(15) стосовно q і ψ.
– Обчислити нове наближення радіальної функції $r := r+q$ та невідомої густини $\varphi := \varphi + \psi$.
– Ітерувати два останні кроки поки не виконається певний критерій зупинки. Наприклад, поки поправка не буде достатньо мала

$$\frac{\|q\|_{L^2[0,2\pi]}}{\|r\|_{L^2[0,2\pi]}} < \epsilon$$

із заданим $\epsilon > 0$.

Зауважимо, що система (14)–(15) лінійна, але досі залишається некоректною з огляду на некоректність початкової задачі. Щоб отримати стійкий чисельний розв'язок, можна на кожній ітерації застосувати метод регуляризації Тіхонова.

5.2. Метод колокації та квадратур

Шукатимемо апроксимацію поправки q у скінченновимірному просторі. Нехай це буде простір тригонометричних поліномів степеня меншого або рівного N такий, що

$$q(t) \approx \sum_{m=0}^{N} a_m \cos mt + \sum_{m=1}^{N} b_m \sin mt, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Або ж у більш загальних позначеннях

$$q(t) \approx \sum_{m=0}^{2N} d_m q_m(t),$$

де

$$d_m = \begin{cases} a_m, & m = \overline{0,N}, \\ b_{m-N}, & m = \overline{N+1,2N}, \end{cases}$$

$$q_m(t) = \begin{cases} \cos(mt), & m = \overline{0,N}, \\ \sin((m-N)t), & m = \overline{N+1,2N}. \end{cases}$$

Задамо рівновіддалений поділ

$$t_j = \frac{\pi}{n} j, \quad j = 0, \ldots, 2n-1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Деякі інтеграли системи містять особливості. Для їхньої дискретизації використаємо квадратури

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left\{ \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right\} f(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} R_j(t) f(t_j), \tag{17}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau - t}{2} f(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} \widetilde{T}_j(t) f(t_j), \tag{18}$$

де $R_j(t)$, $\widetilde{T}_j(t)$ – відомі вагові функції. До інтегралів із гладкими ядрами застосуємо правило трапеції

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j). \tag{19}$$

З виведенням квадратурних формул і доведенням їхньої збіжності можна ознайомитись у [8].

Застосуємо до інтегралів системи (14)–(15) квадратурні формули (17)–(19). Для повної дискретизації колокуємо отримані співвідношення у вузлах (16). У підсумку отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{2n-1} A_{ij}^{(11)} \psi_j + \sum\limits_{j=0}^{2N} d_j A_{ij}^{(12)} = b_i^{(1)}, \\ \sum\limits_{j=0}^{2n-1} A_{ij}^{(21)} \psi_j + \sum\limits_{j=0}^{2N} d_j A_{ij}^{(22)} = b_i^{(2)}, \end{cases} \tag{20}$$

де

$$\psi_j \approx \psi(t_j), \quad i = \overline{0, 2n-1}, \quad 4n > 2N+1.$$

Елементи матриці обчислюватимемо за формулами

$$A_{ij}^{(11)} = \frac{1}{2n} \widetilde{K}_1(t_i, t_j) - \frac{C_1}{2} R_j(t_i) I,$$

$$A_{ij}^{(21)} = \frac{1}{2n} K_{12}(t_i, t_j) + \frac{\pi}{n} \left[I - \Phi(x_2(t_i), \overline{0}) \right],$$

$$A_{ij}^{(22)} = \frac{q_j(t_i)}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} K_{22}'(t_i, t_k) \varphi(t_k),$$

$$A_{ij}^{(12)} = \frac{1}{2n} \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{2n-1} \left[q_j(t_i) K_{11}'(t_i, t_k) + q_j(t_k) K_{11}'(t_k, t_i) \right] \varphi(t_k), t \neq \tau, \\ \sum\limits_{k=0}^{2n-1} \boldsymbol{K_{11}'}(q_j; t_k), \quad t = \tau. \end{cases}$$

Вектор вільних членів матиме вигляд

$$b_i^{(1)} = w_1(t_i) - \sum_{k=0}^{2n-1} A_{ik}^{(11)} \varphi(t_k),$$

$$b_i^{(2)} = \tilde{w}_2(t_i) - \sum_{k=0}^{2n-1} A_{ik}^{(21)} \varphi(t_k).$$

Значення потенціалів w_1 та $\tilde{w}_2$ у вузлах (16) будемо обчислювати за допомогою квадратур (17)-(19). Правильні апроксимації

$$w_1(t_i) \approx \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} N_{12}(t_i, t_k) f_2(t_k) - K_{12}(t_i, t_k) g_2(t_k),$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2(t_i) \approx \sum_{k=0}^{2n-1} \left[\frac{1}{2n} \widetilde{N}_2(t_i, t_k) + \frac{C_3}{2|x_2'(t_k)|} \widetilde{T}_k(t_i) Q^\top \right] f_2(t_k) - \\ - \sum_{k=0}^{2n-1} \left[\frac{1}{2n} \widetilde{K}_2(t_i, t_k) - \frac{C_1}{2} R_k(t_i) I \right] g_2(t_k) - \\ - \frac{f_2(t_i)}{2|x_2'(t_i)|} - \frac{\pi}{n} \left[I - \Phi(x_2(t_i), \overline{0}) \right] \sum_{k=0}^{2n-1} g_2(t_k). \end{aligned}$$

Отримана система (20) є перевизначеною та погано зумовленою.

5.3. Метод найменших квадратів

Застосувавши метод найменших квадратів до дискретної задачі (20), отримаємо регуляризовану систему лінійних рівнянь із квадратною матрицею

$$\begin{cases} \alpha \psi_i + \sum\limits_{j=0}^{2n-1} \boldsymbol{a}_{ij}^{(11)} \psi_j + \sum\limits_{j=0}^{2N} d_j \, \boldsymbol{a}_{ij}^{(12)} = \boldsymbol{b}_i^{(1)}, \quad i = \overline{0, 2n-1}, \\ \beta d_i + \sum\limits_{j=0}^{2n-1} \boldsymbol{a}_{ij}^{(21)} \psi_j + \sum\limits_{j=0}^{2N} d_j \, \boldsymbol{a}_{ij}^{(22)} = \boldsymbol{b}_i^{(2)}, \quad i = \overline{0, 2N}, \end{cases}$$

де $\alpha > 0$ та $\beta > 0$ – параметри регуляризації, а елементи системи обчислюються за формулами

$$\boldsymbol{a}_{ij}^{(lp)} = \sum_{k=0}^{2n-1} \left[A_{ki}^{(l1)} \right]^\top A_{kj}^{(p1)} + \sum_{k=0}^{2N} \left[A_{ki}^{(l2)} \right]^\top A_{kj}^{(p2)},$$

$$\boldsymbol{b}_i^{(l)} = \sum_{k=0}^{2n-1} \left[A_{ki}^{(l1)} \right]^\top b_k^{(1)} + \sum_{k=0}^{2N} \left[A_{ki}^{(l2)} \right]^\top b_k^{(2)}.$$

Обчисливши нові апроксимації, можна продовжувати ітераційний процес, доки не виконається критерій зупинки.

6. Чисельні експерименти

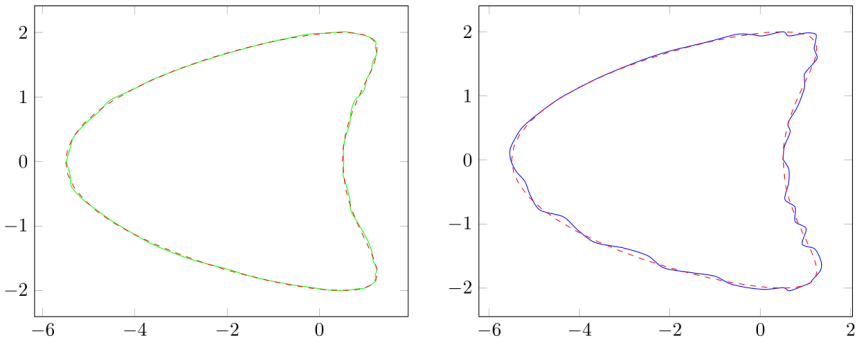
Щоб вхідні дані у прикладах були узгодженими, обчислимо значення напруження на зовнішній межі, розв'язавши задачу Діріхе (1)-(3), де f задано як

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 5x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma_2.$$

Як параметри Ляме приймемо $\lambda = 2$, $\mu = 1$, параметри дискретизації оберемо $n = 16$ та $N = 6$. Нехай зовнішня межа – це коло радіуса 6 з центром у початку координат. Внутрішня межа Γ_1 має таке параметричне подання:

$$\Gamma_1 = \left\{ x_2(t) = (1.8\cos t, 1.68\sin t + 1.4\cos^2 t) : \ t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

За початкове наближення оберемо коло радіуса 3 теж з цетром у початку координат. На рис. зображено результати обчислення для випадку точних вхідних даних і даних з похибкою у 3%.



(a) $\delta = 0\%$ (b) $\delta = 3\%$

Реконструкція межі Γ_1 (———) та її точне значення (- - - -)
при точних вхідних даних (a) і при рівні шуму $\delta = 3\%$ (b)

Зазначимо, що параметри регуляризації α та β підбирали шляхом порівняння нев'язки на кожному кроці ітерації. Хоча, як зазначено у [9], можна застосовувати й інший підхід: на кожній ітерації автоматично переобчислювати ці параметри, зробивши жорстку прив'язку до номера ітерації. Або ж, як у [7], використовувати ті самі значення α та β на кожній ітерації, попередньо визначивши їх на першій ітерації.

7. Висновки

Ми розв'язували нелінійну обернену задачу еластостатики. Спершу її звели до нелінійної системи інтегральних рівнянь. Потім параметризували та лінеаризували систему, попередньо обчисливши похідні Фреше. Зробили декомпозицію ядер із сингулярностями: особливості виділили у формі вагових функцій. Потім до інтегралів застосували квадратурні формули та колокували отримані співвідношення

у вузлах квадратурних формул, що призвело до повної дискретизації системи. У підсумку отримали перевизначену СЛАР. Для її розв'язування застосували метод найменших квадратів, мінімізуючи нев'язку зі штрафами.

Наведений алгоритм розв'язування нелінійної обереної задачі ефективний, оскільки розмірність вихідної задачі зменшена на одиницю. Ми шукали наближення до межі у класі зіркових кривих. Замість обчислення поправки у векторному полі, ми апроксимували поправку в скралярному полі. Наведені результати свідчать про ефективінсть методу для точних і для збурених вхідних даних.

Список використаної літератури

1. Chapko R. On the non-linear integral equation approaches for the boundary reconstruction in double-connected planar domains / R. Chapko, O. Ivanyshyn, T. Kanafotskyy // Journal of Numerical & Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 122. – P. 7–20.
2. Chapko R. On the numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation via a direct integral equation approach / R. Chapko, B.T. Johansson // Inverse Probl. Imag. – 2012. – Vol. 6. – P. 25–36.
3. Chapko R. On the use of an integral equation approach for the numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in a doubly connected planar domain / R. Chapko, B.T. Johansson, Y. Savka // Inverse problems in Science and Engineering. – 2013. – Vol. 22. – P. 130–149.
4. Chapko R. On the numerical solution of a Cauchy problem in an elastostatic half-plane with a bounded inclusion / R. Chapko, B.T. Johansson, O. Sobeyko // Computer Modeling in Engineering & Science. – 2010. – Vol. 62 – P. 57–75.
5. Chapko R. On a boundary integral equation method for elastostatic Cauchy problems in annular planar domains / R. Chapko, B.T. Johansson, M. Shkolyk // Journal of Numerical & Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 126. – P. 16–32.
6. Chapko R. On the numerical solution of a Cauchy problem for an elastostatic equation / R. Chapko, O. Sobeyko // Visnyk Lviv Univ. – 2009. – Vol. 1. – P. 1–15.
7. Ivanyshyn O. Nonlinear integral equations for solving inverse boundary value problems for inclusions and cracks / O. Ivanyshyn, R. Kress // J. Integral Equations Appl. – 2006. – Vol. 18. – P. 13–38.
8. Kress R. Linear integral equation / R. Kress. – New-York: Springer, 2014, 3ed. – 412 p.
9. Kress R. Nonlinear integral equations and the iterative solution for an inverse boundary value problem / R. Kress, W. Rundell // Inverse Problems. – 2005. – Vol. 21. – P. 1207–1223.
10. Kupradze V.D. Potential methods in the theory of elasticity / V.D. Kupradze. – Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1965.

Стаття: надійшла до редколегії 28.08.2023
доопрацьована 20.09.2023
прийнята до друку 27.10.2023

ON A BOUNDARY RECONSTRUCTION PROBLEM FOR AN ELASTOSTATICS EQUATION IN A DOUBLE-CONNECTED DOMAIN

M. Vlasiuk

Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: mariia.vlasiuk@lnu.edu.ua

Elastostatics describes the processes of linear elasticity that arise in various problems of physics and mechanics. The nonlinear inverse elastostatics problem consists in the reconstruction of one boundary of the body with a given Cauchy data on another boundary, or a part of this boundary. The problem is ill-possed in terms of stability according to the input data. The identifiability of the internal boundary is shown. The reduction of the problem to a nonlinear system of integral equations is presented. The resulting system is parameterized and linearized using Frèchet derivatives. Some integrals contain singularities that have been allocated in a form of special weight functions. An iterative algorithm for solving the problem is described. Discretization and regularization of the system are highlighted. The initial problem was reduced to a completely discrete system of linear equations. After solving this system, we reconstructed the inner boundary. Numerical examples demonstrate the effectiveness and applicability of the proposed approach for accurate input data, as well as for perturbed data with a certain noise level.

Key words: elastostatics, inverse problem, nonlinear problem, integral equations approach, trigonometric quadratures, double connected domain.