УДК 517.94:519.62 doi: 10.30970/vam.2023.31.00000

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Я. Пелех, А. Кунинець, С. Ментинський

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери 12, Львів, 79013
e-mail: andrii.v.kunynets@lpnu.ua

Використовуючи апарат неперервних дробів і методику побудови однокрокових методів, запропоновано числові методи розв'язання задачі Коші для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь. За відповідних значень параметрів отримано наближення до точного розв'язку першого та другого порядку точності. Запропоновано множину параметрів, за яких одержано розрахункові формули, які на кожному кроці інтегрування дають змогу отримувати верхнє та нижнє наближення до точного розв'язку. Використовуючи лише два обчислення правої частини інтегро-диференціального рівняння, побудовано множину параметрів, за яких отримано не тільки двосторонній метод, а також можна обчислювати явний вираз головного члена локальної похибки.

Ключові слова: числові методи, задача Коші, інтегро-диференціальне рівняння, двосторонні наближення.

1. Вступ

Багато прикладних задач зводяться до розв'язання нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь. Для розв'язування таких задач важливо, щоб основні властивості розв'язку добре відображались наближеними методами. В прикладній математиці широкого застосування набули дробово-раціональні наближення, які за відповідних умов дають високу швидкість збіжності алгоритмів, а також двосторонні або монотонні наближення досліджуваних задач. У розрахунку задач гідроакустики, в'язкопружності, епідеміології, кінетики, електроніки, і т. д. виникає потреба знаходити не тільки наближені розв'язки досліджуваних математичних моделей, а й отримувати оцінку похибки результату. Тому інтерес до питань побудови двосторонніх наближень як до можливих засобів оцінки похибки останнім часом зростає. Одним з ефективних способів побудови таких наближень є ланцюгові дроби. Процес їх обчислень циклічний і легко програмується на ПК.

2. Формулювання задачі

Розглянемо на відрізку $I_L : [x_0, x_0 + L]$ задачу Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u'(x) = F\left[x, u(x), \int_{x_0}^{x} g[x, s, u(s)]ds\right], \tag{1}$$

$$u(x_0) = u_0, \quad x \in [x_0, x_0 + L], \quad L < \infty. \tag{2}$$

Припустимо, що розв'язок (1), (2) існує і єдиний, а функції F і g володіють необхідною гладкістю. Зауважимо, що рівняння (1) можна перетворити в еквівалентну систему

$$u'(x) = F\left[x, u(x), z(x)\right], \quad z(x) = \int_{x_0}^{x} g[x, s, u(s)]ds.$$

Пропонуються обчислювальні схеми, які дають змогу на кожному кроці інтегрування отримувати наближення до точного розв'язку задачі (1)–(2) першого та другого порядку точності. Виписано значення параметрів, за яких отримуємо двосторонні наближення до точного розв'язку.

3. Побудова методів Рунге-Кутта

На відрізку I_L введемо сітку $\sigma_h = \{x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = x_0 + L\}$ з кроком $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Використовуючи апарат ланцюгових дробів [1-3] та теорію побудови методів Рунге-Кутта [4, 5], наближений розв'язок задачі (1), (2) в точці $x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді неперервного дробу [6, 7]

$$u_1^{[k,l]} = \frac{P_{[k,l]}}{Q_{[k,l]}} = \cfrac{c_0}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \cfrac{d_{k,1}}{1 + \ddots \quad + d_{k,l}}}}. \tag{3}$$

При $k + l = 2$ ($k = 1, 2;\ l = 0, 1$)

$$c_0 = u_0, \quad d_{1,0} = -\frac{\delta_1}{c_0}, \quad d_{1,1} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{\delta_1 c_0}, \quad d_{2,0} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{c_0^2},$$

$$\delta_i = h\sum_{j=1}^{2} a_{ij}k_j, \quad i = 1, 2, \quad k_1 = F[x_0 + \alpha_1 h, u_0, 0], \tag{4}$$

$$k_2 = F[x_0 + \alpha_2 h, x_0 + \beta_{21} hk_1, \gamma_{21} K_1], \quad K_1 = hg[x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma hk_1]$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_{21}, \gamma-$ невідомі параметри.

Розвинення розв'язку задачі (1)–(2) в ряд Тейлора в околі точки x_0 має вигляд

$$u(x_0{+}h) = u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) + \frac{h^3}{6}u'''(x_0) + O(h^4),$$

де

$$\begin{aligned}
&u'(x_0) = (F)_0,\\
&u''(x_0) = (F_x)_0 + (F_u)_0(F)_0 + (F_z)_0(g)_0,\\
&u'''(x_0) = (F_{xx})_0 + 2(F_{xu})_0(F)_0 + (F_{uu})_0(F^2)_0 + (F_x)_0(F_u)_0 +\\
&\ + (F_{zz})_0(g^2)_0 + 2(F_{xz})_0(g)_0 + 2(F_{uz})_0(F)_0(g)_0 + 2(F_z)_0(g_x)_0 +\\
&\ + (F_z)_0(g_u)_0(F)_0 + (F_z)_0(g_s)_0 + (F_u^2)_0(F)_0 + (F_u)_0(F_z)_0(g)_0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Розглянемо формули (3) і (4) при $k = 1,\ l = 1$

$$u_1^{[1,1]} = \cfrac{u_0}{1 - \cfrac{h\cfrac{a_{11}k_1 + a_{12}k_2}{u_0}}{1 + \cfrac{h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)^2 - u_0(a_{21}k_1 + a_{22}k_2)}{u_0(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)}}} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &k_1 = F[x_0 + \alpha_1 h, u_0, 0], \quad k_2 = F[x_0 + \alpha_2 h, u_0 + \beta_{21}hk_1, \gamma_{21}K_1], \\ &K_1 = hg[x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma hk_1]. \end{aligned} \tag{7}$$

Невідомі параметри a_{ij}, α_j $(i = 1,2; j = 1,2)$, β_{21}, $\gamma_{21}, \alpha, \beta, \gamma$ виберемо з умови, щоб

$$R_{[1,1]} = \left| u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} \right| = O(h^3).$$

Для цього спочатку перетворимо формулу (6) до вигляду

$$u_1^{[1,1]} = u_0 + \cfrac{h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)}{1 - \cfrac{a_{21}k_1 + a_{22}k_2}{a_{11}k_1 + a_{12}k_2}},$$

або

$$u_1^{[1,1]} = u_0 + \frac{h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)^2}{(a_{11} - a_{21})k_1 + (a_{12} - a_{22})k_2} = u_0 + \frac{P_{[1,1]}}{Q_{[1,1]}}. \tag{8}$$

Подання формули (6) у вигляді (8) дає змогу проводити розрахунки при $u_0 \equiv 0$, а також, як свідчить подальше викладення, якщо $a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = 0$, то

$$\left| u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} \right| = O(h^3).$$

Розвинувши $P_{[1,1]}$ та $Q_{[1,1]}$ в ряди Тейлора, отримаємо:

$$\begin{aligned} u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = \frac{1}{Q_{[1,1]}} \big(&h(F^2)_0 \left[a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22} - (a_{12} + a_{22})^2 \right] + \\ &+ h^2 \Big[(a_{11} - a_{21})\alpha_1 + (a_{12} - a_{22})\alpha_2 + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}) - \\ &- 2(a_{12} + a_{22})(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2) \Big] (F)_0(F_x)_0 + h^2 \Big[\frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}) + \\ &+ (a_{11} - a_{22})\alpha_1 + (a_{12} - a_{22})\beta_{21} - 2(a_{11} + a_{12})a_{12}\beta_{21} \Big] (F_u)_0(F^2)_0 + \\ &+ h^2 \Big[\frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}) + (a_{12} - a_{22})\gamma_{21} - \\ &- 2(a_{11} + a_{12})a_{12}\gamma_{21} \Big] (F)_0(F_z)_0(g)_0 + R_{[1,1]}. \end{aligned}$$

Похибка $R_{[1,1]}$ має вигляд

$$R_{[1,1]} = h^3 \Bigg\{ (A_1 + A_2 - A_3\alpha_2^2)(F)_0(F_{xx})_0 + \left[\left(\frac{1}{2}A_4 - A_3\right)\alpha_2\beta_{21} + 2A_2\right](F)_0^2(F_{xu})_0 +$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}A_4 - A_3\right)\beta_{21}^2 + A_2\right](F)_0^3(F_{uu})_0 + \left\{(A_4 - A_3)\alpha_1\beta_{21} + A_2 + \left[A_5 + \frac{1}{2}A_4\beta_{21}\right]\right\} \times$$

$$\times (F)_0(F_x)_0(F_u)_0 + \left[\left(\frac{1}{2}A_4 - A_3\right)\gamma_{21}^2 + A_2\right](F)_0(F_{zz})_0(g)_0^2 +$$

$$+ \left[(A_4 - 2A_3)\alpha_2\gamma_{21} + 2A_2\right](F)_0(F_{xz})_0(g)_0 +$$

$$+ \left[(A_4 - 2A_3)\beta_{21}\gamma_{21} + 2A_2\right](F)_0^2(F_{uz})_0(g)_0 +$$

$$+ \left[(A_4 - 2A_3)\gamma_{21}\alpha + 2A_2\right](F)_0(F_z)_0(g_x)_0 + \left[(A_4 - 2A_3)\gamma_{21}\gamma + A_2\right](F)_0^2(F_z)_0(g_u)_0 +$$

$$+ \left[(A_4 - 2A_3)\gamma_{21}\beta + A_2\right](F)_0(F_z)_0(g_s)_0 + A_2(F)_0^2(F_u)_0^2 + A_2(F)_0(F_u)_0(F_z)_0(g)_0 +$$

$$+ (F_x)_0^2\left[A_5 - (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2)^2\right] + \left[\frac{1}{2}A_4\beta_{21} - a_{12}^2\beta_{21}^2\right](F)_0^2(F_u)_0^2 +$$

$$+ \left[\frac{1}{2}A_4\gamma_{21} - a_{12}^2\gamma_{21}^2\right](F_z)_0^2(g)_0^2 + \left[A_5 + \frac{1}{2}A_4\beta_{21}\right](F_x)_0(F_z)_0(g)_0 +$$

$$+ \left[A_5 + \frac{1}{2}A_4\beta_{21} + \frac{1}{2}A_4\gamma_{21}\right](F)_0(F_z)_0(F_u)_0 \Bigg\} + O(h^4),$$

де

$$A_1 = (a_{11} - a_{21})\frac{\alpha_1^2}{2} + (a_{12} - a_{22})\frac{\alpha_2^2}{2},\ A_2 = \frac{1}{6}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}),$$

$$A_3 = (a_{11} + a_{12}),\ A_4 = (a_{12} - a_{22}),\ A_5 = (a_{11} - a_{21})\frac{\alpha_1}{2} + (a_{12} - a_{22})\frac{\alpha_2}{2}.$$

Випишимо вирази для коефіцієнтів чисельника при степенях h і h^2

$h(F^2)_0:$ $\quad a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22} - (a_{11} + a_{12})^2.$

$h^2(F)_0(F_x)_0:$ $\quad (a_{11} - a_{21})\alpha_1 + (a_{12} - a_{22})\alpha_2 + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}) -$
$-2(a_{11} + a_{12})(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2).$

$h^2(F^2)_0(F_u)_0:$ $\quad \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}) + (a_{12} - a_{22})\beta_{21} - 2(a_{11} + a_{12})a_{12}\beta_{21}.$

$h^2(F)_0(F_z)_0(g)_0:$ $\quad \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}) + (a_{12} - a_{22})\gamma_{21} - 2(a_{11} + a_{12})a_{12}\gamma_{21}.$

Якщо прирівняти коефіцієнти при h і h^2 до нуля, то отримаємо таку систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22} - (a_{11} + a_{12})^2 = 0, \\ (a_{11} - a_{21})\alpha_1 + (a_{12} - a_{22})\alpha_2 + \dfrac{1}{2}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}) - \\ -2(a_{11} + a_{12})(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2) = 0, \\ \dfrac{1}{2}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}) + (a_{12} - a_{22})\,\beta_{21} - 2(a_{11} + a_{12})a_{12}\beta_{21} = 0, \\ \dfrac{1}{2}(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}) + (a_{12} - a_{22})\,\gamma_{21} - 2(a_{11} + a_{12})a_{12}\gamma_{21} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

У цьому випадку локальна похибка набуде вигляду $R_{[1,1]} = u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = O(h^3)$. Оскільки $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ не входить у систему (9), то їх можна вибрати довільними, наприклад, прийняти $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Для отримання методу першого та другого порядку точності необхідно, щоб $a_{11} + a_{12} = 1$. Тоді ми отримаємо дві множини розв'язків такої системи:

I. $\alpha_1 = \alpha_2$:

$$a_{11} = 1 - a_{12},\ a_{21} = -a_{22},\ \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{1}{2(a_{12} + a_{22})},$$

де $a_{11},\ a_{12}-$ параметри $(a_{12} + a_{22} \neq 0)$;

II. $\alpha_1 \neq \alpha_2$:

$$a_{11} = 1 - a_{12},\ a_{21} = a_{12} + \frac{2\alpha_1 - 1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$a_{22} = \frac{1 - 2\alpha_1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} - a_{12},\ \beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, a_{12}-$ довільні числа $(\alpha_1 \neq 1)$.

Можна вибрати параметри $a_{ij},\ \alpha_i(i,j = 1,2),\ \beta_{21},\ \gamma_{21},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ так, щоб зменшити кількість доданків при h^3. Наприклад, приймемо

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \frac{2}{3},\ \beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{2}{3},\ \alpha = \frac{2}{3},$$

$$\beta = \gamma = \frac{1}{3},\ a_{11} = 1,\ a_{12} = 0,\ a_{21} = -\frac{3}{4},\ a_{22} = \frac{3}{4}.$$

Тоді

$$R_{[1,1]} = u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = \frac{h^3 \left\{ \dfrac{1}{6}(F)_0(F_u)_0 u''(x_0) - \dfrac{1}{4}(u''(x_0))^2 \right\} + O(h^4)}{(F)_0 - \dfrac{1}{2}hu''(x_0) + O(h^2)} = \tag{10}$$

$$= \frac{1}{12}h^3 u''(x_0)\{2(F_u)_0 - 3u''(x_0)/(F)_0\} + O_1(h^4).$$

Для всіх визначених вище параметрів $(a_{21}k_1 + a_{22}k_2) \cong hu''(x_0)$ і якщо $(F_u)_0 = 0$, то з (10) можна отримати інформацію про величину похибки $R_{[1,1]}$.

Зауваження 1. *Якщо у формулах (6)–(7) прийняти $a_{21} = a_{22} = 0$, то отримаємо традиційні методи Рунге-Кутта другого порядку точності для розв'язання задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра [8].*

Розглянемо тепер формули (3)–(4) при $k = 2,\ l = 0$

$$u_1^{[2,0]} = \frac{u_0}{1 - \dfrac{h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)}{u_0} + \dfrac{h^2(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)^2 - u_0 h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2)}{u_0^2}}.$$

Перетворимо $u_1^{[2,0]}$ до вигляду

$$u_1^{[2,0]} = \frac{u_0^3}{u_0^2 - u_0 h[(a_{11} + a_{21})k_1 + (a_{21} + a_{22})k_2] + h^2(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)^2} = \frac{P_{[2,0]}}{Q_{[2,0]}}.$$

Розвинення $Q_{[2,0]}$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 набуває вигляду

$$\begin{aligned}
Q_{[2,0]} &= u_0^2 - hu_0\{(a_{11} + a_{21})k_1 + (a_{12} + a_{22})k_2\} + h^2(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)^2 = \\
&= u_0^2 - hu_0(a_{11} + a_{21} + a_{12} + a_{22})(F)_0 - \\
&- h^2\Big\{[(a_{11} + a_{21})\alpha_1 + (a_{12} + a_{22})\alpha_2](F_x)_0 u_0 - (a_{12} + a_{22})\beta_{21} u_0 (F)_0 (F_u)_0 - \\
&- (a_{21} + a_{22})\gamma_{21} u_0 (F_u)_0 (g)_0 + (a_{11} + a_{12})^2 (F^2)_0\Big\} + O(h^3).
\end{aligned}$$

Розглянемо різницю

$$\begin{aligned}
u(x_0 + h) - u_1^{[2,0]} &= \left\{u(x_0 + h)Q_{[2,0]} - P_{[2,0]}\right\}/Q_{[2,0]} = \\
&= \Big[\{1 - (a_{11} + a_{21} + a_{12} + a_{22})\}hu_0^2(F)_0 + \\
&+ \left\{\frac{1}{2} - [(a_{11} + a_{21})\,\alpha_1 + (a_{12} + a_{22})\,\alpha_2]\right\} h^2 u_0^2 (F_x)_0 + \\
&+ \left\{\frac{1}{2} - (a_{12} + a_{22})\,\beta_{21}\right\} h^2 (F)_0 (F_u)_0 + \\
&+ \left\{\frac{1}{2} - (a_{12} + a_{22})\,\gamma_{21}\right\} h^2 u_0^2 (F_u)_0 (g)_0 + \\
&+ \left\{(a_{11} + a_{12})^2 - (a_{12} + a_{21} + a_{12} + a_{22})\right\} u_0 (F)_0 + O(h^3)\Big] /Q_{[2,0]}.
\end{aligned}$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при h і h^2, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}
1 - (a_{11} + a_{21} + a_{12} + a_{22}) = 0, \\
\dfrac{1}{2} - (a_{11} + a_{21})\,\alpha_1 + (a_{12} + a_{22})\,\alpha_2 = 0, \\
\dfrac{1}{2} - (a_{12} + a_{22})\,\beta_{21} = 0, \\
\dfrac{1}{2} - (a_{12} + a_{22})\,\gamma_{21} = 0, \\
(a_{11} + a_{12})^2 - (a_{12} + a_{21} + a_{12} + a_{22}) = 0.
\end{cases} \qquad (11)$$

Система (11) має такі дві сім'ї розв'язків

I. $\alpha_1 = \alpha_2$:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \beta_{21} = \gamma_{21},\ a_{11} = 1 - a_{12},\ a_{22} = \frac{1}{2\gamma_{21}} - a_{12},$$

де $\gamma_{21},\ a_{12}-$ параметри ($\gamma_{21} \neq 0$).

II. $\alpha_1 \neq \alpha_2$:

$$a_{11} = 1 - a_{12},\ a_{21} = -a_{22},\ a_{22} = \frac{1 - 2\alpha_1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} - a_{12},\ \beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - 2\alpha_1},\ (1 - 2\alpha_1 \neq 0),$$

де $\alpha_1,\ \alpha_2,\ a_{12}-$ параметри ($\alpha_1 \neq 1/2$).

Ця система має такий розв'язок

$$a_{11} = 1 - \frac{1}{2\beta_{21}} + a_{22},\ a_{12} = \frac{1}{2\beta_{21}} - a_{22},\ a_{21} = -a_{22},$$
$$\alpha_2 = \beta_{21} + (1 - 2\beta_{21})\alpha_1,\ \gamma_{21} = \beta_{21},$$

де $\alpha_1,\ a_{22},\ \beta_{21}\ (\beta_{21} \neq 0)$ – параметри.

Наприклад, якщо прийняти $\alpha_1 = 0$, то отримаємо

$$\alpha_2 = \beta_{21},\ \gamma_{21} = \beta_{21},\ a_{11} = 1 - \frac{1}{2\beta_{21}} + a_{22},$$

$$a_{12} = \frac{1}{2\beta_{21}} - a_{22},\ a_{21} = -a_{22}.$$

Тут $a_{22},\ \beta_{21}\ (\beta_{21} \neq 0)$ – параметри.

Якщо прийняти $\beta_{21} = \dfrac{1}{2}$, тоді

$$\alpha_2 = \frac{1}{2},\ \gamma_{21} = \frac{1}{2},\ a_{11} = a_{22},\ a_{21} = -a_{22},\ a_{12} = 1 - a_{22},$$

де $a_{22},\ \alpha_1$ – параметри.

4. Побудова двосторонніх розрахункових формул

Оскільки немає ефективного способу оцінки похибки наближеного розв'язку, то виникла необхідність розробки двосторонніх методів [9-11].

Побудуємо розрахункові формули, які дають двосторонні наближення до точного розв'язку задачі (1)–(2). Прийнявши в системі (9) $a_{11} + a_{12} = 1$, і прирівнявши друге, третє та четверте рівняння відповідно до $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, отримаємо розрахункову формулу, похибка якої в точці $x = x_1 = x_0 + h$ має вигляд

$$R_{[1,1]} = h^2\big[\omega_1(F)_0(F_x)_0 + \omega_2(F^2)_0(F_u)_0 + \omega_3(F)_0(F_z)_0(g)_0\big]/Q_{[1,1]} + O(h^3).$$

Зауважимо, що за різних значень ω_i ($i = 1, 2, 3$) можна побудувати двосторонні наближення на різних класах функцій.

1. Якщо прийняти $\omega_1 = \omega$ а $\omega_2 = \omega_3 = 0$, то отримаємо дві сім'ї розв'язків:

1а) $\alpha_1 = \alpha_2$:

$$a_{11} = 1 - a_{12}, \quad a_{21} = -a_{22}, \quad a_{22} = \frac{1}{2\beta_{21}} - a_{12}, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2} - \omega, \gamma_{21} = \beta_{21},$$

де β_{21} – відмінний від нуля параметр;

1б) $\alpha_1 \neq \alpha_2$:

$$a_{11} = 1 - a_{12}, \quad a_{21} = -a_{22}, \quad a_{22} = a_{12} - \frac{1}{2\beta_{21}}, \alpha_2 = \alpha_1 + \beta_{21}(1 - 2\alpha_1 - 2\omega), \gamma_{21} = \beta_{21}.$$

Тут $\beta_{21}(\beta_{21} \neq 0)$ – параметр.

Локальна похибка тоді набуває вигляду

$$R_{[1,1]}(\omega_1 = \omega) = u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = \omega h^2 (F)_0 (F_x)_0 / Q_{[1,1]} + O(h^3).$$

2. У випадку, якщо $\omega_2 = \omega$, а $\omega_1 = \omega_3 = 0$, то отримаємо такі розв'язки:

2а) $\alpha_1 = \alpha_2$:

$$a_{11} = 1 - a_{12}, \; a_{21} = a_{12} - \frac{1}{2\gamma_{21}}, \; a_{22} = -a_{21}, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, \; \beta_{21} = (1 - 2\omega)\gamma_{21},$$

де β_{21} – відмінний від нуля параметр;

2б) $\alpha_1 \neq \alpha_2$:

$$\alpha_2 = \gamma_{21} + (2\gamma_{21} - 1)\alpha_1, \; a_{11} = 1 - a_{12}, \; a_{21} = -a_{22}, \; a_{22} = \frac{1}{2\gamma_{21}}, \; \beta_{21} = (1 - 2\omega)\gamma_{21}.$$

Тут $\alpha_1, \; \gamma_{21} \; (\gamma_{21} \neq 0)$ – параметри. Тоді

$$R_{[1,1]}(\omega_2 = \omega) = u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = \omega h^2 (F^2)_0 (F_u)_0 / Q_{[1,1]} + O(h^3).$$

3. Якщо $\omega_3 = \omega$, а $\omega_2 = \omega_3 = 0$, то маємо таку множину розв'язків:

3а) $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$,

$$a_{11} = 1 - \frac{1}{2\beta_{21}} + a_{22}, \; a_{12} = \frac{1}{2\beta_{21}} - a_{22}, a_{21} = -a_{22}, \; \gamma_{21} = (1 - 2\omega)\beta_{21},$$

де $a_{22}, \beta_{21} \neq 0$ – параметри;

3б) $\alpha_1 \neq \alpha_2$:

$$\alpha_2 = \beta_{21} + (1 - 2\beta_{21})\alpha_1, \; a_{11} = 1 - a_{12}, \; a_{12} = \frac{1}{2\beta_{21}} - a_{22}, \; a_{21} = -a_{22}, \; \gamma_{21} = (1 - 2\omega)\beta_{21}.$$

Тут $\alpha_1, \; \beta_{21}(\beta_{21} \neq 0)$ – параметри. За цих параметрів

$$R_{[1,1]}(\omega_3 = \omega) = u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = \omega h^2 (F)_0 (F_z)_0 (g)_0 / Q_{[1,1]} + O(h^3).$$

Зауваження 2. *У всіх трьох випадках вирази, які зображають параметри* $\alpha_1, \; \alpha_2$ *або* β_{21}*, містять параметр* ω*. Це означає, що для отримання двосторонніх наближень до точного розв'язку потрібно додаткові звертання до правої частини рівняння (1).*

4. Прийнявши $\omega_2 = \omega_3 = \omega$ і $\omega_1 = 0$, отримаємо такі розв'язки:

4а) $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{11} = 1 + a_{22} + \dfrac{2\omega - 1}{2\beta_{21}}, a_{12} = \dfrac{1 - 2\omega}{2\beta_{21}} - a_{22}, a_{21} = -a_{22}, \quad \gamma_{21} = \beta_{21}$, де $a_{22},\ \beta_{21}(\beta_{21} \neq 0)$ – параметри.

4б) $\alpha_2 = \alpha_1 + \dfrac{1 - 2\alpha_1}{1 - 2\omega}\beta_{21}, \quad a_{11} = 1 + a_{22} + \dfrac{2\omega - 1}{2\beta_{21}}, a_{12} = \dfrac{1 - 2\omega}{2\beta_{21}} - a_{22}, a_{21} = -a_{22}, \quad \gamma_{21} = \beta_{21}$, де $a_{22}, \alpha_1,\ \beta_{21}(\beta_{21} \neq 0)$ – параметри. За цих значень параметрів

$$R_{[1,1]}(\omega_2 = \omega_3 = \omega) = \omega h^2[(F^2)_0(F_u)_0 + (F)_0(F_z)(g)_0]/Q_{[1,1]} + O(h^3).$$

Зауваження 3. *У формулах із 4а) параметри $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{21}, \gamma_{21}$ не містять ω. А це означає, що розрахункові формули (6)–(7) за цих параметрів дають змогу отримувати верхні та нижні наближення до точного розв'язку задачі (1)–(2) без додаткових звертань до правої частини рівняння (1). Тобто, використовуючи тільки два звертання до правої частини інтегро-диференціального рівняння, можна отримати розрахункову формулу другого порядку точності, а також двосторонні наближення першого порядку точності до точного розв'язку.*

5. Якщо, наприклад, прийняти $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ і

$$a_{11} = 1 - a_{12}, \quad a_{21} = a_{12} - \frac{1 - 2\omega}{2\beta_{21}}, \quad a_{22} = \frac{1 - 2\omega}{2\beta_{21}} - a_{12},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_{21}, \quad \gamma_{21} = \beta_{21},\ (\omega \neq 1/2),$$

де $a_{12},\ \beta_{21}\ (\beta_{21} \neq 0)$ – параметри, тоді

$$R_{[1,1]}(\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega) = \omega h^2 (F)_0 u''(x_0)/Q_{[1,1]} + O(h^3) =$$

$$= \omega \frac{hk_1(k_2 - k_1)}{(2\alpha_2 + 1)k_1 - k_2} + O(h^3).$$

За цих параметрів отримаємо розрахункові формули, які допомагають знаходити не тільки двосторонні наближення до точного розв'язку задачі (1)–(2) в точці x_1, а також обчислювати явний вираз головного члена локальної похибки методу без додаткових обчислень правої частини інтегро-диференціального рівняння.

Для знаходження наближень у таких точках $x_n (n \geq 2)$ користуємося способом рухомого початку. Подавши рівняння (1) у вигляді

$$u'(x) = F[x, u(x), w_n(x) + W(x)],$$

де

$$w_n(x) = \int_{x_0}^{x_n} g(x, s, u(s))ds, \quad W(x) = \int_{x_n}^{x} g(x, s, u(s))ds,$$

отримаємо задачу з новим початком інтегрування (x_n), для розв'язування якої використовують формули вигляду (5)–(6), причому наближення до $w_n(x)$ знаходимо за допомогою квадратурних формул.

5. Висновки

Виведено розрахункові формули розв'язання задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь, що базуються на неперервних дробах. За відповідних значень параметрів можна отримувати наближення до точного розв'язку задачі Коші (1)–(2) порядку $O(h^2)$ і $O(h^3)$.

Знайдено множину параметрів, за яких можна отримати двосторонні розрахункові формули. Пара формул, що відповідають двом значенням, які відрізняються лише знаком, становлять розрахункові формули двостороннього методу. Одна з них буде давати верхнє наближення до точного розв'язку, а інша – нижнє наближення. За наближений розв'язок приймаємо півсуму двосторонніх наближень. Модуль піврізниці двосторонніх наближень дає похибку методу.

Запропоновано розрахункові формули, які дають змогу знаходити не тільки двосторонні наближення до точного розв'язку задачі (1)–(2) в точці x_1, а також обчислювати явний вираз головного члена локальної похибки методу без додаткових обчислень правої частини інтегро-диференціального рівняння.

Модульний характер запропонованих методів дає змогу в кожній точці інтегрування отримати кілька наближень до точного розв'язку.

Запропоновану методику знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь можна застосувати для побудови числових методів більш високого порядку точності.

Список використаної літератури

1. Бейкер Дж. Аппроксимации Паде. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – Москва: Мир, 1986. – 502 с.
2. Джоунс У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения / У. Джоунс, В. Трон. – Москва: Мир, 1985. – 416 с.
3. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике / В.Я. Скоробогатько. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
4. Крылов В.И. Вычислительные методы. Том II / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный.,– Москва: Наука, 1977. – 400 с.
5. Холл Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт. – Москва: Мир, 1979. – 312 с.
6. Пелех Я.М. Методи розв'язування початкової задачі з двосторонньою оцінкою локальної похибки / Я.М. Пелех, А.В. Кунинень, Г.І. Берегова, Т.В. Магеровська // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2021. – Вип. 33. – С. 88–92.
7. Пелех Я.М. Методи розв'язування початкової задачі з оцінкою головного члена локальної похибки / Я.М. Пелех, І.С. Будз, А.В. Кунинень, Б.М. Філь // Вісник Львівського університету. Серія прикладної математики та інформатики. – 2019. – Вип. 27. – С. 75–88.
8. Coroian I. Asupra metodei Runge-Kutta-Fehlberg, pentru ecuatia integrala neliniara de tip Volterra // Stud. Cerc. Math. – 1974. – Vol. 26, No 4. – P. 505–511.
9. Горбунов А.Д. О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. I / А.Д. Горбунов, Ю.А. Шахов // Журн. вычислит. математики и матем. физики. – 1963. – Т. 3, № 2. – С. 239–253.
10. Горбунов А.Д. О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. II / А.Д. Горбунов,

Ю.А. Шахов // Журн. вычислит. математики и матем. физики. – 1964. – Т. 4, № 3. – С. 426–433.

11. Добронец Б.С. Двусторонние численные методы / Б.С. Добронец, В.В. Шайдуров. – Новосибирск: Наука. – 1990. – 206 с.

Стаття: надійшла до редколегії 28.04.2023
доопрацьована 15.06.2023
прийнята до друку 31.06.2023

NUMERICAL METHODS FOR SOLVING INITIAL VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ya. Pelekh, A. Kunynets, S. Mentynskyi

Lviv Polytechnic National University,
12, Bandera str., 79013, Lviv
e-mail: andrii.v.kunynets@lpnu.ua

Numerical methods for solving the Cauchy problem for nonlinear integro-differential equations of the Volterra type using the apparatus of continued fractions and the method of constructing one-step methods are proposed.

Two nonlinear methods are constructed. The values of parameters for methods with first and second-order accuracy are obtained.

Computational formulas are proposed, which at each integration step allow obtaining upper and lower approximations to the exact solution without additional calculations of the right-hand side of the integro-differential equation. The computational formulas form a two-sided method, where the main terms of the local error differ only in sign. The half-sum of the two-sided approximations to the exact solution is taken as the approximate solution at the integration point, and the absolute value of half-difference determines the error of the obtained result.

Using only two computations of the right-hand side of the integro-differential equation, a set of parameters is constructed for which not only a two-sided method is obtained but also an explicit expression for estimating the main term of the local error is calculated.

The modular structure of the proposed algorithms allows obtaining several approximations to the exact solution at each integration point, and comparing these approximations provides useful information for choosing the integration step size and assessing the accuracy of the approximate solution.

Key words: numerical methods, Initial value problem, Volterra integro-differential equations, two-sided approximation.