

УДК 519.6:517.925

ПОРІВНЯННЯ h -АДАПТИВНИХ СХЕМ МСЕ РІЗНИХ ПОРЯДКІВ ДЛЯ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ**Г. Квасниця, П. Малашнюк, Г. Шинкаренко**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: halyna.kvasnytsya@lnu.edu.ua*

Метод скінченних елементів (МСЕ) застосовано для розв'язання сингулярно збурених крайових задач зі звичайними диференціальними рівняннями другого порядку. Для обчислення їхніх наближених розв'язків побудовано h -адаптивні схеми МСЕ з використанням кусково-лінійних, кусково-квадратичних і кусково-кубічних ермітових апроксимацій. Аналітично обчислені складові системи лінійних алгебричних рівнянь МСЕ з такими наближеннями на скінченному елементі. Для кожного виду апроксимацій запропоновано апостеріорні оцінювачі похибки МСЕ, наведено вирази для обчислення розподілів енергетичних норм оцінювачів на скінченних елементах. На їхній підставі побудовано алгоритм ітераційного уточнення сіток з використанням нерівномірних поділів області визначення розв'язків на скінченні елементи, що дає змогу обчислювати апроксимації МСЕ з наперед заданою точністю. Ефективність розроблених адаптивних схем ілюструється аналізом числових розв'язків модельних сингулярно збурених крайових задач.

Ключові слова: варіаційна задача, h -адаптивна схема методу скінченних елементів, лінійні, квадратичні та ермітові кубічні апроксимації, апостеріорний оцінювач похибки, критерій адаптування сітки.

1. ВСТУП

Для розв'язання різних практичних задач числовими методами важливим питанням є оцінка якості знайдених наближених розв'язків і витрачених комп'ютерних ресурсів на їх відшукання. Особливої ваги це питання набуває для сингулярно збурених задач, де точність знайденого за допомогою класичних схем МСЕ числового наближення суттєво погіршується в околах примежових і внутрішніх шарів. Зазвичай у цих невеликих зонах шуканий розв'язок характеризується раптовим зростанням модуля свого градієнта до величезних значень, відтворення яких апроксимаціями на рівномірних сітках потребує надмірної кількості обчислень.

Природний шлях вирішення цієї проблеми – згущення сітки скінченних елементів лише в зонах згаданих шарів, що певною мірою допоможе оптимізувати обчислювальні витрати завдяки локальному згущенню/розрідженню сітки. Ефективне керування реконструкцією сіток можливе лише за умов надійного розпізнавання (хоча б наближеного) розподілу похибок знайденої апроксимації між її скінченними елементами. Ця проблема вирішується побудовою так званих апостеріорних оцінювачів похибок (АОП) кожної обчисленої апроксимації МСЕ, їхні теоретичні засади можна знайти, наприклад, у Aisworth&Oden [8], Johnson [14], Babuska&Whiteman [9]. АОП, наділені властивостями ефективності та надійності, з точністю до мультиплікативних сталих обчислюють не лише норми похибки та розподіл її вкладів (індикаторів АОП) з кожного скінченного елемента, а в деяких випадках

знаходять точні значення меж похибки, див. наприклад [15, 16]. Серед різних видів АОП особливу увагу привертають неявні АОП залишкового типу [8], які можна отримати як розв'язок варіаційної задачі на похибку з правою частиною у вигляді нев'язки вихідного рівняння. Суттєвими перевагами використання таких оцінювачів є їхня простота та економність. У випадку апроксимації похибки за допомогою поліноміальних базисних функцій з локальним носієм відшукування коефіцієнтів оцінювача потребує розв'язання окремої задачі про похибку на кожному скінченному елементі вихідної триангуляції. Після цього достатньо обчислити розподіл індикаторів похибок між скінченими елементами сітки і прийняти рішення щодо її згущення/розрідження, щоб досягнути рівномірного розподілу похибки наперед заданого рівня.

Такий підхід до побудови оцінювачів у одновимірних задачах було використано у працях [1, 2], а також подібно будувались АОП для задач теорії пружності [4], задач про вимушені гармонічні коливання [5], задач дифузії-конвекції-реакції [18].

Базуючись на набутому знанні про характер похибки знайденої апроксимації, можна будувати різні стратегії її поліпшення, серед яких своїми критеріями оптимізації обчислювальних витрат виділяються (i) h -адаптивні схеми МСЕ (локальне поліпшення біжучої сітки), див. [3] і бібліографію в них, та (ii) hp -адаптивні схеми (локальне поліпшення біжучої сітки та \ або підвищення порядку базисних функцій), див. [13] та бібліографію в них.

Застосування належних АОП і критеріїв адаптування класичних схем МСЕ не лише підсилює стійкість його апроксимацій, а й дає змогу обчислювати збіжну послідовність наближених розв'язків [11, 12, 17], знаходження якої зупиняється у разі досягнення наперед заданого допустимого рівня (толерантності) похибки.

Мета нашої праці – розвинути теоретичні результати статей [1, 2] стосовно конструювання та використання h -адаптивних схем МСЕ з кусково поліноміальними базисними функціями до третього порядку включно, верифікацією цих результатів шляхом кваліфікованих обчислювальних експериментів з модельними сингулярно збуреними крайовими задачами та з'ясуванням впливу порядку поліноміальних апроксимацій на ефективність і затратність відшукування апроксимацій з наперед заданою точністю.

Текст статті укладено так. В пп. 2 і 3 формулюється модельна крайова та відповідна їй варіаційна задачі і достатні умови однозначної її розв'язності. В п. 4 описуємо апроксимації МСЕ з поліноміальними базисними функціями різних порядків (частинами лінійні, квадратичні та кубічні ермітові) на кожному скінченному елементі поділу з використанням локальної змінної та наводимо вигляд відповідної системи дискретизованих рівнянь МСЕ. У п. 5 наведено загальний вигляд АОП залишкового типу, який отримано як наближений розв'язок варіаційної задачі на похибку (залишок знайденої апроксимації), а також наведено формули для знаходження коефіцієнтів оцінювача похибки для кожної апроксимації. У п. 6 розглянуто стратегію адаптування сітки скінчених елементів, яка забезпечує рівномірний розподіл похибок наперед визначеного рівня (толерантності до похибок), а в останньому п. 7 проілюстровано можливості розробленої методики розв'язанням сингулярно збурених задач зі змінними коефіцієнтами і проведено порівняльний аналіз збіжності цих апроксимацій в процесі h -адаптування.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Розглянемо крайову задачу: знайти функцію $u = u(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння другого порядку

$$-[\mu(x)u'(x)]' + \beta(x)u'(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}, \quad (1)$$

і задовольняє крайові умови

$$u(a) = 0, \quad -\mu(b)u'(b) = \alpha[u(b) - \bar{u}]. \quad (2)$$

Тут $\mu = \mu(x), \beta = \beta(x), \sigma = \sigma(x)$ та $f = f(x)$ - задані функції такі, що

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \mu_0 = \text{const} > 0, & \sigma(x) \geq 0, \\ \mu, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega), & f \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (3)$$

а $\alpha \geq 0, \bar{u}$ - задані сталі.

Крайова задача (1), (2) може бути сингулярно збуреною, див. [19, 21]. У цьому випадку її розв'язок містить примежові або/та внутрішні шари, в околах яких його похідні набувають величезних значень. Ця обставина, з одного боку, свідчить про невеликий запас стійкості розв'язків задач такого гатунку, і, з іншого – ставить особливі вимоги до числових схем апроксимації їхніх розв'язків, див. [7]. Із літературних джерел добре відомо, див. [10, 20], що згадані труднощі успішно долають так звані адаптивні схеми МСЕ.

3. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Крайова задача (1)-(2) допускає варіаційне формулювання вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти } u \in V := \{v \in H^1(a, b) : v(a) = 0\} \text{ таку, що} \\ c(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (4)$$

з білінійною формою та лінійним функціоналом, який визначений так:

$$\begin{cases} c(u, v) := \int_a^b (\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv) dx + \alpha u(b)v(b), \\ \langle l, v \rangle := \int_a^b f v dx + \alpha \bar{u}v(b) \quad \forall u, v \in V. \end{cases} \quad (5)$$

З огляду на теорему Лакса-Мільграма-Вишика [6] можна переконатися, що варіаційна задача (4) коректно сформульована, якщо її дані задовольняють умови регулярності (3) і

$$\sigma - \frac{1}{2}\beta' \geq 0 \quad \forall x \in (a, b), \quad \alpha - \frac{1}{2}\beta(b) \geq 0. \quad (6)$$

За цих умов білінійна форма $c(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ варіаційної задачі утворює на просторі допустимих функцій V енергетичну норму

$$\|v\| := \sqrt{c(v, v)} \quad \forall v \in V. \quad (7)$$

Нижче ми дискретизуємо варіаційну задачу (4) за допомогою процедури Гальоркіна, переформульовуючи її в систему алгебричних рівнянь, методи розв'язування яких добре розвинені.

4. МСЕ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ БАЗИСАМИ РІЗНИХ ПОРЯДКІВ

Зафіксуємо натуральне $N > 1$ і за допомогою сітки вузлів $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_N = b$ створимо поділ $\mathfrak{S}_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^{N-1}$ відрізка $[a, b]$ на скінченні елементи $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$. Тут і далі дробовим індексом будемо позначати номер скінченного елемента $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$ та певні його характеристики, скажімо, $x_{i+1/2} := (x_{i+1} + x_i)/2$ і $h_{i+1/2} := x_{i+1} - x_i$ – його центр ваги та діаметр, відповідно, і параметр $h := \max_{0 \leq i \leq N-1} h_{i+1/2}$ називатимемо діаметром цього поділу.

На кожному з поділів $\mathfrak{S}_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^{N-1}$ будемо обчислювати апроксимацію $u_h = u_h(x)$ розв'язку $u = u(x)$ варіаційної задачі (4) у вигляді

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^N u_i \varphi_i(x), \quad (8)$$

де коефіцієнти $u_i \in R$ є шуканими наближеннями до значень $u(x_i)$ та їхніх похідних першого порядку, $\varphi_i(x)$ – частинами визначені базисні функції МСЕ, які на кожному скінченному елементі належать простору поліномів порядку не вище $k = 1, 2$ або 3 , іншими словами, $\varphi_i \in P_k(K_{m+1/2}) \quad \forall K_{m+1/2} \in \mathfrak{S}_h$ і $\varphi_i(x_n) = \delta_{in}$.

4.1. ЛОКАЛЬНІ ЗМІННІ НА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТАХ

Щоб уніфікувати визначення базисних функцій МСЕ та необхідних обчислень на кожному такому елементі $K_{i+1/2}$ вводимо локальну координату ξ згідно з правилом:

$$\begin{cases} x = x(\xi) := \frac{1}{2}(1 - \xi)x_i + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_{i+1} = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \\ \qquad \qquad \qquad = x_{i+1/2} + \frac{1}{2}h_{i+1/2}\xi \qquad \qquad \forall \xi \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (9)$$

Тут і далі використовуємо позначення

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \omega(\xi) := \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (10)$$

З використанням локальних змінних маємо змогу переписати інтеграли у визначеннях (5) як суму інтегралів на поділі $\mathfrak{S}_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^{N-1}$. Зокрема,

$$\int_a^b f(x)v(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)v(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} h_{i+1/2} \int_{-1}^1 f[x(\xi)]v[x(\xi)]d\xi. \quad (11)$$

Цей запис засвідчує, що на кожному елементі $K_{i+1/2}$:

- 1) достатньо визначити функцію $v[x(\xi)]$ як функцію $\bar{v}(\xi)$ локальної змінної ξ , чим ми безпосередньо скористаємося нижче, визначаючи базисні функції МСЕ;
- 2) з огляду на малість діаметра скінченного елемента $h_{i+1/2}$ і допущення, що $f(x)$ незначно змінюється на ньому, інтегрування можна виконати наближено з використанням формули про інтегральне середнє

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)v(x)dx \approx f(x_{i+1/2}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x)dx = h_{i+1/2} f_{i+1/2} \int_{-1}^1 \bar{v}(\xi)d\xi, \quad (12)$$

де $f_{i+1/2} \equiv \{f\}_{i+1/2} := f(x_{i+1/2})$.

Ба більше, якщо $\bar{v}(\xi)$ є поліномом, як у випадку базисних функцій МСЕ, то цей інтеграл обчислюється аналітично у замкненому вигляді. Саме цю технологію використали ми нижче для обчислення коефіцієнтів систем алгебричних рівнянь МСЕ з поліноміальними базисами різних порядків.

4.2. ЛІНІЙНІ АПРОКСИМАЦІЇ НА СКІНЧЕННОМУ ЕЛЕМЕНТІ

На кожному скінченному елементі $K_{i+1/2}$ опишемо апроксимацію $u_h(x)$ за допомогою локальної змінної ξ

$$u[x(\xi)] \cong u_h(\xi)|_{K_{i+1/2}} := u_i\theta(\xi) + u_{i+1}\omega(\xi) \quad \forall \xi \in [-1; 1]. \quad (13)$$

Враховуючи головну крайову умову варіаційної задачі (4), приймемо в (8) коефіцієнт $u_0 = 0$ та запишемо кусково-лінійну апроксимацію $u_h(\xi)$ так

$$\begin{aligned} u_h(\xi) &:= \sum_{i=0}^{N-1} u_h(\xi)|_{K_{i+1/2}} = \sum_{i=0}^{N-1} \{u_i\theta(\xi) + u_{i+1}\omega(\xi)\}|_{K_{i+1/2}} \\ &= \sum_{i=1}^N u_i\bar{\varphi}_i(\xi)|_{\Omega_i} \quad \forall \xi \in [-1; 1]. \end{aligned} \quad (14)$$

В цій сумі ми явно виражаємо апроксимацію МСЕ як лінійну комбінацію кусково-визначених базисних функцій Куранта

$$\Omega_n := \text{supp } \varphi_n(\xi) = \{x \in [a, b] : \varphi_n(x) \neq 0\} = K_{n-1/2} \cap K_{n+1/2}, \quad 1 \leq n < N,$$

$$\Omega_N := \text{supp } \varphi_N(\xi) = \{x \in [a, b] : \varphi_N(x) \neq 0\} = K_{N-1/2},$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_n(\xi) &:= \begin{cases} \omega(\xi) := \frac{1}{2}(1 + \xi) & \text{на } \bar{K}_{n-1/2}, \\ \theta(\xi) := \frac{1}{2}(1 - \xi) & \text{на } \bar{K}_{n+1/2}, \end{cases} & 1 \leq n < N - 1, \\ \bar{\varphi}_N(\xi) &:= \omega(\xi) := \frac{1}{2}(1 + \xi) & \text{на } \bar{K}_{N-1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Система функцій (15) формує базис вибраного нами простору кусково лінійних апроксимацій

$$V_h := \{v \in V \cap C(a, b) : v \in P_1(K_{i+1/2}), \quad i = 0, \dots, N - 1\}, \quad \dim V_h = N.$$

Тепер ми деталізуємо спосіб обчислення значень білінійної форми та лінійного функціонала (5) на поділі $\mathfrak{S}_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^{N-1}$. Застосовуючи теорему про інтегральне середнє, підставивши ненульові базисні функції з (15) й обчисливши інтеграли від поліномів щонайвище другого ступеня, одержимо на кожному скінченному елементі вклад до системи лінійних алгебричних рівнянь МСЕ у вигляді (див. [1] та позначення, запозичені звідти)

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\mu}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \sigma h \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \\ &= \left\{ h \frac{f}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \quad \forall K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (16)$$

За відомими правилами з рівнянь (16) укладається система лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для відшукування вузлових значень $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^N$ на довільних нерівномірних сітках.

4.3. КВАДРАТИЧНІ АПРОКСИМАЦІЇ НА СКІНЧЕННОМУ ЕЛЕМЕНТІ

У підпросторі кусково квадратичних апроксимацій

$$V_h := \{v \in V \cap C(a, b) : v \in P_2(K_{i+1/2}), \quad i = 0, \dots, N - 1\}, \quad \dim V_h = 2N,$$

на кожному скінченному елементі $K_{i+1/2}$ виберемо апроксимацію розв'язку варіаційної задачі (4) у вигляді

$$\begin{cases} u[x(\xi)] \cong u_h(\xi)|_{K_{i+1/2}} := \{2\theta(\xi) [\theta(\xi) - \frac{1}{2}]\}u_i + \\ \quad + \{4\omega(\xi)\theta(\xi)\}u_{i+1/2} + \{2\omega(\xi) [\omega(\xi) - \frac{1}{2}]\}u_{i+1}, \\ x(\xi) = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \quad \forall \xi \in [-1, +1], \quad i = 0, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (17)$$

Тут і нижче, щоб описати квадратичну апроксимацію із (17) як функцію глобальної змінної $x \in K_{i+1/2}$, достатньо замінити визначення (10) функцій $\theta = \theta(\xi)$ і $\omega = \omega(\xi)$ такими, як $\bar{\theta}(x) := h_{i+1/2}^{-1}(x_{i+1} - x)$, $\bar{\omega}(x) := h_{i+1/2}^{-1}(x - x_i) \quad \forall x \in K_{i+1/2}$.

Тоді як і в п. 4.1 обчислимо систему лінійних алгебричних рівнянь МСЕ на скінченному елементі $K_{i+1/2}$ такого вигляду:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\mu}{3h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{6} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} + \frac{\sigma h}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \\ & \times \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1/2} \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{fh}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \\ & \forall K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (18)$$

4.4. ЕРМІТОВІ КУБІЧНІ АПРОКСИМАЦІЇ НА СКІНЧЕННОМУ ЕЛЕМЕНТІ

Вибраний нами підпростір кусково кубічних апроксимацій вигляду

$$V_h := \{v \in V \cap C(a, b) : v \in P_3(K_{i+1/2}), \quad i = 0, \dots, N - 1\}, \quad \dim V_h = 3N,$$

утворюють поліноми такого гатунку:

$$\begin{cases} u[x(\xi)] \approx u_h(\xi)|_{K_{i+1/2}} := \theta^2(\xi) [2\omega(\xi) + 1] u_i + h_{i+1/2} \theta^2(\xi) \omega(\xi) u'_i \\ \quad + \omega^2(\xi) [2\theta(\xi) + 1] u_{i+1} - h_{i+1/2} \omega^2(\xi) \theta(\xi) u'_{i+1}, \\ x(\xi) = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \quad \forall \xi \in [-1, 1] \quad \forall K_{i+1/2} \in \mathfrak{S}_h. \end{cases} \quad (19)$$

У цьому випадку- ми припускаємо, що $u_h \in V_h$ допускає розриви першої похідної у вузлах поділу, тому коефіцієнти u'_{i+1} можуть приймати різні значення на елементах $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$ та $K_{i+3/2} = (x_{i+1}, x_{i+2})$. Тоді, як з'ясовано у [2], система лінійних алгебричних МСЕ на кожному скінченному елементі $K_{i+1/2}$ має таку структуру:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\mu}{10h} \begin{bmatrix} 36 & 3h & 3h & -36 \\ 3h & 4h^2 & -h^2 & -3h \\ 3h & -h^2 & 4h^2 & -3h \\ -36 & -3h & -3h & 36 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{20} \begin{bmatrix} -30 & 6h & -6h & 30 \\ -6h & 0 & -h^2 & 6h \\ 6h & h^2 & 0 & -6h \\ -30 & -6h & 6h & 30 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma h}{140} \begin{bmatrix} 156 & 22h & -13h & 54 \\ 22h & 4h^2 & -3h^2 & 13h \\ -13h & -3h^2 & 4h^2 & -22h \\ 54 & 13h & -22h & 156 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u'_{i+1} \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{fh}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ h/2 \\ -h/2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2}. \end{aligned} \quad (20)$$

5. АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБКИ

Нехай на поділі $\mathfrak{S}_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^{N-1}$ обчислено апроксимацію $u_h = u_h(x)$ розв'язку $u = u(x)$ задачі (4) у вигляді (8). Тоді похибку знайденої апроксимації $e_h := u - u_h$ можемо визначити як розв'язок задачі про лишок [4]

$$\begin{cases} \text{знайти похибку } e_h \in E, \quad V = V_h \oplus E, \text{ таку, що} \\ c(e_h, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle := \langle l, v \rangle - c(u_h, v) \quad \forall v \in E. \end{cases} \quad (21)$$

З огляду на те, що $\dim E = +\infty$, знову використовуємо дискретизацію Гальоркіна задачі (21) для знаходження її наближеного розв'язку - апостеріорного оцінювача похибки (АОП) $\varepsilon_h = \varepsilon_h(x)$

$$\begin{cases} \text{задано } E_h \subset E, \dim E_h = N = \text{card}(\mathfrak{S}_h); \\ \text{знайти } \varepsilon_h \in E_h \text{ такий, що} \\ c(\varepsilon_h, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle := \langle l, v \rangle - c(u_h, v) \quad \forall v \in E_h. \end{cases} \quad (22)$$

Формулювання задачі (22) допомагає оптимізувати обчислення АОП

$$\varepsilon_h(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_{i+1/2}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2} \phi_{i+1/2}(x) \quad \forall x \in (a, b), \quad (23)$$

використанням поелементно визначеного ортогонального базису $\{\phi_{i+1/2}(x)\}_{i=0}^{N-1}$, $\text{sup } \phi_{i+1/2} := \bar{K}_{i+1/2} \forall K_{i+1/2} \in \mathfrak{S}_h$, підпростору E_h . В цьому випадку коефіцієнти $\lambda_{i+1/2}$ розвинення (23) обчислюються послідовним переглядом скінченних елементів

$$\lambda_{i+1/2} = \frac{\langle l_{i+1/2}, \phi_{i+1/2} \rangle - c_{i+1/2}(u_h, \phi_{i+1/2})}{c_{i+1/2}(\phi_{i+1/2}, \phi_{i+1/2})} \quad \forall K_{i+1/2} \in \mathfrak{S}_h. \quad (24)$$

Енергетичну норму АОП η_h та його індикаторів $\eta_{i+1/2}$ знаходимо у вигляді [7]

$$\eta_h^2 = \|\varepsilon_h\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \eta_{i+1/2}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} c_{i+1/2}(\varepsilon_{i+1/2}, \varepsilon_{i+1/2}) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2}^2 \|\phi_{i+1/2}\|^2. \quad (25)$$

Нижче ми використовуємо лише АОП Діріхле, тобто такі, які допускають, що вузлові значення похибок апроксимації настільки малі, що ними можна знехтувати, прийнявши $\varepsilon_h(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, N$. Ба більше, якщо знайдена апроксимація $u_h|_{K_{i+1/2}} \in P_m(K_{i+1/2})$, то базисна функція її АОП $\phi_{i+1/2} \in P_{m+1}(K_{i+1/2})$, $m = 1, 2, 3$.

5.1. АОП ЧАСТИНАМИ ЛІНІЙНИХ АПРОКСИМАЦІЙ

У випадку використання частинами лінійних апроксимацій МСЕ, базисна функція для оцінювача похибки є поліномом другого порядку, яка в локальних координатах описується виразом $\phi_{i+1/2}(\xi) = 4\theta(\xi)\omega(\xi)$.

Коефіцієнти $\lambda_{i+1/2}$ розвинення (25) подають наближені значення похибки апроксимації $e_h(x)$ в центрах ваг кожного скінченного елемента та обчислюються за правилом

$$\lambda_{i+1/2} \equiv \varepsilon_h(x_{i+1/2}) = \frac{5}{4} \left\{ \frac{h^2(f - \beta q' - \sigma q)}{\mu(10 + Pe \cdot St)} \right\}_{i+1/2} \quad (26)$$

тут і нижче вжито позначень

$$q_{i+1/2} := \frac{1}{2}(u_{i+1} + u_i), \quad q'_{i+1/2} := h^{-1}(u_{i+1} - u_i), \quad q''_{i+1/2} := h^{-1}(u'_{i+1} - u'_i)$$

та $Pe := h\beta\mu^{-1}$ і $St := h^2\sigma\mu^{-1}$ для локальних (сіткових) величин критеріїв подібності Пекле та Струхаля, відповідно.

У підсумку одержимо таке правило обчислення норми АОП та його індикаторів:

$$\|\varepsilon_h\|^2 = c(\varepsilon_h, \varepsilon_h) = \sum_{i=0}^{N-1} \eta_{i+1/2}^2 = \frac{5}{6} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{h^3(f - \beta q' - \sigma q)^2}{\mu(10 + Pe \cdot St)} \right\}_{i+1/2}. \quad (27)$$

5.2. АОП ЧАСТИНАМИ КВАДРАТИЧНИХ АПРОКСИМАЦІЙ

У цьому випадку апроксимацій, див. (18), ми вживаємо АОП кубічним поліномом з базисними функціями вигляду

$$\phi_{i+1/2}(\xi) = \theta(\xi)\omega(\xi)[\theta(\xi) - \omega(\xi)]. \quad (28)$$

Коефіцієнти $\lambda_{i+1/2}$ розвинення (23) обчислюються за правилами

$$\lambda_{i+1/2} \equiv \varepsilon_h(x_{i+1/2}) = 7 \left\{ \frac{4Pe(q - u_{i+1/2}) + St \cdot q'h}{42 + St} \right\}_{i+1/2}. \quad (29)$$

Норма апостеріорного оцінювача похибки (25) та її розподіл між скінченними елементами визначається так:

$$\|\varepsilon_h\|^2 = \frac{1}{210} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2}^2 \{ \mu h^{-1}(42 + St) \}_{i+1/2}. \quad (30)$$

5.3. АОП ЧАСТИНАМИ КУБІЧНИХ АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ

Оцінювач похибок апроксимацій МСЕ, обчислених з використанням ермітових кубічних поліномів вигляду (20), будемо будувати на кожному скінченному елементі з використанням поліномів четвертого порядку, а саме

$$\varepsilon_h(\xi) := \lambda_{i+1/2}\phi(\xi) \equiv 16\theta_i^2(\xi)\omega_i^2(\xi)\lambda_{i+1/2} \quad \forall K_{i+1/2}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (31)$$

Коефіцієнти $\lambda_{i+1/2}$ розвинення (23) обчислюються у вигляді

$$\lambda_{i+1/2} = \frac{3}{64} \left\{ \frac{28(h^2 f \mu^{-1} - St \cdot q) - 21Pe \cdot hq' + q''h^2(28 - 4Pe + 3St)}{4 + St} \right\}_{i+1/2}. \quad (32)$$

Норма апостеріорного оцінювача похибки (25) та її розподіл між скінченними елементами обчислюється так:

$$\|\varepsilon_h\|^2 = \frac{128}{315} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2}^2 \{ \mu h^{-1}(4 + St) \}_{i+1/2}. \quad (33)$$

6. СТРАТЕГІЯ АДАПТУВАННЯ СІТКИ

Згущення сітки відбувається відповідно до стратегії, описаної в [1], а саме: обчислюємо на кожному скінченному елементі значення відносної похибки у вигляді

$$\eta_{i+1/2} := \frac{\sqrt{N} \|\varepsilon_h\|_{i+1/2}}{\sqrt{\|u_h\|^2 + \|\varepsilon_h\|^2}} 100\%, \quad (34)$$

де $\|u_h\|^2$ – енергетична норма наближеного розв'язку. Якщо на скінченному елементі $K_{i+1/2}$ виконується умова

$$\eta_{i+1/2} > tol \quad (35)$$

(*tol*–заданий максимально допустимий рівень похибки), то цей елемент поділяється на два нових, які в покращеній сітці замінюють його на черговому кроці адаптування. Решта елементів залишається без змін і разом з усіма новоутвореними скінченними елементами формують уточнену сітку. Якщо жоден з елементів не задовольняє умову (35), то процес адаптування вважають завершеним.

7. АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Прийmemo в рівнянні крайової задачі (1) – (2)

$$\mu(x) = 1, \beta(x) = 7700(x - 0.5)^2, \sigma(x) = 1000(x + 0.5)^3, f(x) = 5600x^4, a = 0, b = 1.$$

В крайовій умові (2) візьmemo $\alpha = 1.e28$, $\bar{u} = 0$. Початкова сітка – рівномірний поділ відрізка на $N_0 = 10$ скінченних елементів, допустимий рівень похибки $tol = 5\%$. Наближені розв'язки цієї задачі будувалися описаною вище процедурою *h*–адаптування з використанням кусково лінійних ($P_1(K_{i+1/2})$), квадратичних ($P_2(K_{i+1/2})$) і кубічних ($P_3(K_{i+1/2})$) ермітових апроксимацій МСЕ.

Скрізь вжито такі позначення: m – номер біжучого кроку адаптування; $N_m = card(\mathfrak{S}_h)$ – кількість скінченних елементів поділу \mathfrak{S}_h на цьому кроці; p – порядок швидкості збіжності апроксимацій в енергетичній нормі; t – час на виконання одного кроку адаптування; T – сумарний час, затрачений на процес адаптування до досягнення заданої точності; δ_{\max} – максимальна відносна похибка на біжучій сітці; δ_h – глобальна відносна похибка знайденого наближення

$$\delta_{\max} = \max_{K_{i+1/2} \in \mathfrak{S}_h} \sqrt{\frac{\eta_{i+1/2}^2 N_m}{\|u_h\|^2 + \|\varepsilon_h\|^2}} \times 100\%, \quad \delta_h = \frac{\|\varepsilon_h\|}{\|u_h\|} 100\%. \quad (36)$$

За допущення, що показники збіжності апроксимацій МСЕ на нерівномірних поділах близькі до апіорних оцінок стосовно параметра дискретизації $h_m := N_m^{-1}$, їхні порядки швидкості збіжності обчислювалися згідно з правилом [4]

$$p_m := \frac{\ln \eta_0 - \ln \eta_m}{\ln N_m - \ln N_0}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (37)$$

7.1. РЕЗУЛЬТАТИ *h*–АДАПТУВАННЯ З $P_1(K_{i+1/2})$ АПРОКСИМАЦІЯМИ

Результати *h*–адаптування з $P_1(K_{i+1/2})$ апроксимаціями ілюструють рис.1 і табл.1. З рис.1 видно забрудненість (осциляціями) знайденого наближення після

першого кроку адаптування сітки, яка зумовлена її недостатньою роздільністю в околі примежового шару точного розв'язку цієї задачі з великими глобальними числами $Pe := (\text{diam}\Omega)^2 \|\beta\|_\infty \mu^{-1} = 1925$ і $St := (\text{diam}\Omega)^2 \|\sigma\|_\infty \mu^{-1} = 3375$. Тут $\|\cdot\|_\infty$ – норма в просторі $L^\infty(\Omega)$. Відомо, що примежовий шар має ширину, обернено пропорційну числу Пекле, і виникає тут в точці $x = 1$, оскільки в цьому випадку $\beta(x) \geq 0$, див. праву частину рис. 1.

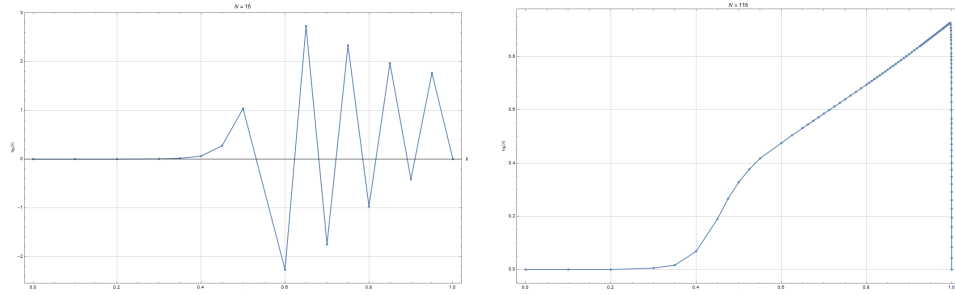


Рис. 1. Вузли адаптованих сіток і $P_1(K_{i+1/2})$ апроксимації:
зліва – $N_1 = 16$, справа – $N_{14} = 116$

Таблиця 1

Збіжність послідовності h -адаптивних $P_1(K_{i+1/2})$ апроксимацій

m	N	$\ u_h\ $	$\ e_h\ $	$\delta_{\max}, \%$	$\delta_h, \%$	p	t, ms
0	10	16,3628	24,7490	164,3	151,2	-	1,3667
1	16	25,7729	70,8956	152,1	275,1	-1,2	1,8875
2	24	28,5512	114,2671	195,8	400,2	-1,1	0,1646
3	38	28,5326	126,7200	333,8	444,1	-1,0	0,3972
4	54	28,5244	90,64629	499,0	317,8	-0,7	0,8790
5	66	28,5222	49,1247	610,5	172,2	-0,3	1,6497
6	74	28,5726	24,9588	554,5	87,4	-0,0	2,4540
7	78	28,5749	12,51721	350,7	43,8	0,3	2,5439
8	82	28,5793	6,26615	172,8	21,9	0,6	3,2485
9	87	28,5793	3,14169	74,2	11,0	0,9	3,3305
10	95	28,5793	1,59119	29,9	5,6	1,2	6,6269
11	105	28,5793	0,8574	11,6	3,0	1,4	4,4250
12	114	28,5793	0,59979	5,1	2,1	1,5	6,0616
13	115	28,5793	0,58759	5,0	2,1	1,5	6,9518
14	116	28,5793	0,57612	4,9	2,0	1,5	9,5345

З огляду на табл. 1, починаючи з третього кроку, наша стратегія адаптування сітки забезпечує монотонне зменшення приблизно вдвічі абсолютних похибок апроксимації завдяки лише локальному додаванню нових вузлів сітки в зоні примежового шару, причому так, що демонструє навіть підвищення очікуваного порядку збіжності від $p_m = 1,0$ до $p_m = 1,5$ ($m = 12, 13, 14$). Іншими словами, сконструйована так h -адаптивна схема МСЕ надійно забезпечує акуратне відтворення примежового ша-

ру дозованим додаванням вузлів сітки в його околі. Зауважимо, що для виконання заданої точності апроксимацій загальна кількість вузлів сітки зростає майже в 12 разів, тоді як похибка зменшилася приблизно у 40 разів.

7.2. РЕЗУЛЬТАТИ h -АДАПТУВАННЯ З $P_2(K_{i+1/2})$ АПРОКСИМАЦІЯМИ

Ефекти підвищення порядку апроксимацій до кусково квадратичних можна проаналізувати з даних, зображених на рис. 2 і табл. 2. Основні з них: (i) зменшення кількості кроків адаптування сітки майже вдвічі порівняно з випадком кусково лінійних наближень; (ii) збіжність обчисленої послідовності апроксимацій знову ж таки супроводжується підвищенням порядку: від очікуваного $p_m = 2,0$ до $p_9 = 2,9$.

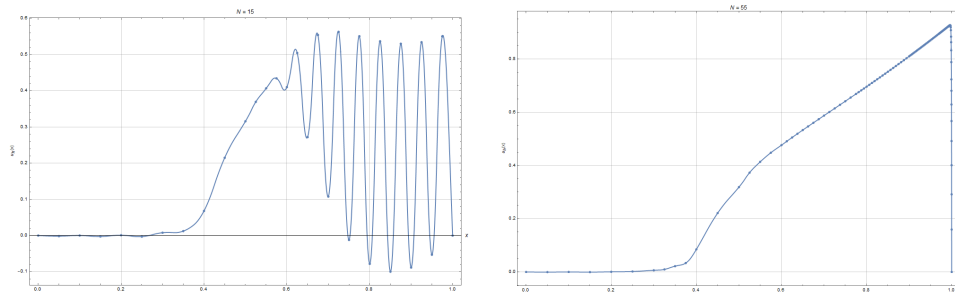


Рис. 2. Вузли адаптованих сіток і $P_2(K_{i+1/2})$ апроксимації:
зліва – $N_1 = 16$, справа – $N_9 = 55$

Таблиця 2

Збіжність послідовності h -адаптивних $P_2(K_{i+1/2})$ апроксимацій

m	N	$\ u_h\ $	$\ e_h\ $	$\delta_{\max}, \%$	$\delta_h, \%$	p	t, ms
0	10	6,8250	55,56846	200,2	814,2	0	1,0216
1	15	19,8217	99,33486	233,9	501,1	-0,7	0,8208
2	23	26,9044	113,2174	320,2	420,8	-0,6	0,2643
3	32	28,4318	77,84706	432,1	273,8	-0,2	0,5314
4	40	28,5953	41,59437	486,4	145,5	0,2	0,9161
5	46	28,6128	19,23343	374,6	67,2	0,7	1,3855
6	49	28,6134	7,33167	173,1	25,6	1,2	1,7254
7	51	28,6134	2,24977	54,1	7,9	1,9	1,8037
8	53	28,6138	0,67094	13,3	2,3	2,6	2,0036
9	55	28,6134	0,36823	4,8	1,3	2,9	2,0038

7.3. РЕЗУЛЬТАТИ h - АДАПТУВАННЯ З $P_3(K_{i+1/2})$ АПРОКСИМАЦІЯМИ

Результати h -адаптування з $P_3(K_{i+1/2})$ апроксимаціями зображено на рис. 3 і табл. 3. Вони демонструють, що використання кубічної поліноміальної апроксимації приводить до зменшення кількості кроків адаптування сітки та суттєвого зменшення кількості скінченних елементів остаточної сітки. Збіжність таких наближень на завершальному кроці вища на два порядки від очікуваної, $p_7 = 5,0$.

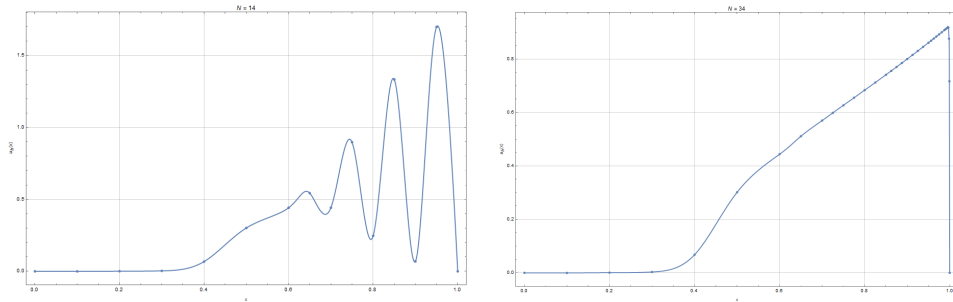


Рис. 3. Вузли адаптованих сіток і $P_3(K_{i+1/2})$ апроксимації:
зліва – $N_1 = 14$, справа – $N_7 = 34$

Таблиця 3

Збіжність послідовності h -адаптивних $P_3(K_{i+1/2})$ апроксимацій

m	N	$\ u_h\ $	$\ e_h\ $	$\delta_{\max}, \%$	$\delta_h, \%$	p	t, ms
0	10	29,3635	83,14006	212,1	283,1	-	3,5275
1	14	28,5180	73,84089	256,4	258,9	0,2	0,8586
2	20	28,4021	49,26918	322,2	173,5	0,5	0,3589
3	26	28,3668	26,0812	323,5	91,9	1,1	0,6
4	30	28,3579	11,56728	205,0	40,8	1,7	0,8949
5	32	28,3565	3,90637	77,1	13,8	2,6	1,0747
6	33	28,3564	0,90987	18,2	3,2	3,7	1,1791
7	34	28,3564	0,19053	3,0	0,7	5,0	3,8508

Табл. 4 доповнює показники збіжності трьох варіантів адаптивних апроксимацій витратами часу комп'ютерних обчислень до досягнення рівня допустимої похибки. Цікаво, що досягнення бажаного рівня похибок для всіх варіантів наближень досягнуто розв'язуванням систем рівнянь МСЕ майже однакових порядків. Результати, наведені в таблиці, демонструють перевагу кусково-кубічних апроксимацій МСЕ над апроксимаціями нижчих порядків, а саме меншу кількість кроків адаптування, менший сумарний час, необхідний для отримання наближення з заданою точністю, а також меншу відносну похибку знайденого наближення. Щодо сумарного часу адаптування, то квадратичні та кубічні апроксимації мають суттєву перевагу над

лінійними, тоді як виграш від використання саме кубічних порівняно з квадратичними є незначним.

Таблиця 4

Порівняння характеристик збіжності послідовностей h -адаптивних апроксимацій

Апроксимація	m	N	$\dim V_h$	$\ u_h\ $	$\ e_h\ $	δ_{\max}	p	T , ms
$P_1(K_{i+1/2})$	14	116	116	28,579	0,5761	4,9	1,5	51,52
$P_2(K_{i+1/2})$	9	55	110	28,613	0,3682	4,8	2,9	12,48
$P_3(K_{i+1/2})$	7	34	102	28,356	0,1905	3	4,9	12,34

8. ВИСНОВКИ

Побудовано h -адаптивні схеми МСЕ для розв'язання лінійних крайових задач зі звичайними диференціальними рівняннями другого порядку. Згадані схеми вживають кусково лінійні, кусково квадратичні або кусково кубічні апроксимації на нерівномірних сітках скінчених елементів [1,2] і здатні обчислювати наближення до точного розв'язку з наперед заданою точністю шляхом цілеспрямованого локального згущення елементів сітки, щоб досягнути рівномірного розподілу похибок між її елементами.

Основне інтелектуальне ядро розроблених схем – апостеріорні оцінювачі похибок залишкового типу, які надійно обчислюють нижню межу енергетичної норми істинної похибки. Кожна базисна функція сконструйованого АОП має носієм лише один скінченний елемент біжучого поділу, приймає нульові значення на кінцях цього елемента (АОП Діріхле) і є поліномом на порядок вище, ніж обчислена на ньому апроксимація МСЕ. Іншими словами, якщо на елементі $K_{i+1/2} \in \mathfrak{Z}_h$ знайдена апроксимація $u_h|_{K_{i+1/2}} \in P_m(K_{i+1/2})$, то базисна функція її АОП (фактично індикатора АОП)

$$\phi_{i+1/2} \in P_{m+1}(K_{i+1/2}), \quad m = 1, 2, 3, \text{ і } \phi_{i+1/2} \in H_0^1(K_{i+1/2}).$$

Ба більше, з огляду на локальність носіїв $\text{supp } \phi_{i+1/2} = K_{i+1/2}$, такі функції утворюють ортогональний базис вибраного підпростору можливих похибок E_h , що дає змогу обчислити норми індикаторів похибок послідовним переглядом елементів поділу. На їхній підставі розроблено алгоритм контролю за розподілом похибок між скінченими елементами сітки та згущення її елементів такий, що завершує рекурентні обчислення при досягненні допустимого рівномірного розподілу норм індикаторів похибок на кожному скінченному елементі поділу.

Обчислювальні експерименти з запропонованими h -адаптивними схемами МСЕ засвідчили, що послідовне уточнення апроксимацій МСЕ із вжитою стратегією рекурентного локального адаптування сіток здатне монотонно поліпшувати структуру збіжної послідовності апроксимацій шуканого розв'язку з показниками, які перевищують мінімальні значення показників швидкості збіжності, передбачені теорією апіорних оцінок похибок. Нарешті, порівняння сконструйованих схем свідчить про переваги вживання кусково кубічних апроксимацій h -адаптивних схем МСЕ такого гатунку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Абрамов Є. Кусково лінійні апроксимації h -адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач / Є. Абрамов, О. Ліпіна, Г. Шинкаренко, А. Ямелинець // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 3–18.
2. Абрамов Є. Частинами квадратичні та кубічні апроксимації h -адаптивного МСЕ для одновимірних крайових задач / Є. Абрамов, Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. – 2011. – Вип. 17. – С. 47–61.
3. Вовк О.В. Апостеріорні оцінювачі похибки серендипових квадратичних апроксимацій МСЕ для еліптичних крайових задач / О.В. Вовк, Г.А. Квасниця, О.Ю. Остапов, Г.А. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. – 2014. – Вип. 21. – С. 67–78.
4. Квасниця Г.А. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики / Г.А. Квасниця, Г.А. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикл. мат. та інф. – 2002. – Вип. 5. – С. 95–106.
5. Квасниця Г.А. Аналіз задачі про гармонічні хвилі в пружних тілах та її h -адаптивна скінченноелементна апроксимація / Г.А. Квасниця, Г.А. Шинкаренко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2020. – Т. 63, № 1. – С. 52–64.
6. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – / Я.Г. Савула. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 181 с.
7. Трушевський В.М. Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі / В.М. Трушевський, Г.А. Шинкаренко, Ю.М. Щербина. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2014. – С. 373–394.
8. Ainsworth M. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis / M. Ainsworth, J.T. Oden. – New-York: Wiley, 2000. – 240 p.
9. Babuska I. Finite Elements: An Introduction to the Method and Error Estimation / I. Babuska, J.R. Whiteman, T. Strouboulis. – New-York: Oxford: University Press, 2011. – 316 p.
10. Bangerth W. Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations / W. Bangerth, R. Rannacher. – Basel: Birkhauser Verlag, 2003. – 208 p.
11. Carstensen C. Convergence of adaptive finite element methods in computational mechanics / C. Carstensen // Applied Numerical Mathematics. – 2009. – № 59. – P. 2119–2130.
12. Dorfler W. A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation / W. Dorfler // SIAM J. Numer. Analysis. – 1996. – Vol. 33, № 3. – P. 1106–1124.
13. Drebotiy R. hp -adaptive finite element method for 1D diffusion-convection-reaction boundary value problems / R. Drebotiy, H. Shynkarenko // Manufacturing Processes. Actual Problems. – Opole: Politechnika Opolska, 2014. – Vol. 1. – P. 11–26.
14. Johnson C. Numerical Solution of Partial Differential Equations by Finite Element Method / C. Johnson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1987. – 278 p.
15. Kvasnytsia H.A. Computable double-sided a posteriori error estimates and h -adaptive finite element approximations / H.A. Kvasnytsia, O.Yu. Ostapov, H.A. Shynkarenko, O.V. Vovk // Manufacturing Process. Actual Problems-2014. – M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler eds. – Opole: Politechnika Opolska, 2014. – Vol. 1. – Basic science applications in manufacturing processes. – P. 87–102.
16. Kvasnytsia H. Numerical analysis of the effectivity and robustness of a posteriori error estimators of finite element approximations for the dual torsion problem / H. Kvasnytsia, H. Shynkarenko, B. Vasylyshyn // Manufacturing Processes: Actual Problems-2017. – O. Hachkevych, A. Stanik-Besler, T. Wolczanski eds. – Opole: Politechnika Opolska, 2017. – Vol. 1. – Basic science applications in manufacturing processes. – P. 95–111.
17. Nocketto R.H. Pointwise a posteriori error estimates for elliptic problems on highly graded meshes / R.H. Nocketto // Math. Comp. – 1995. – Vol. 64 (109). – P. 1–22.

18. Ostapov O.Yu. Finite element adaptive refinement techniques for diffusion-advection-reaction problems / O.Yu. Ostapov, H.A. Shynkarenko, O.V. Vovk // Manufacturing Processes. Actual Problems-2013. – Opole: Politechnika Opolska, 2013. – Vol. 1. – Basic science applications. – P. 31–46.
19. Repin S.I. A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations / S.I. Repin. – Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 2008. – 328 p.
20. Verfürth R. A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods / R. Verfürth. – Oxford: Oxford University Press, 2013, – 416 p.
21. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. – Butterworth-Heinemann, 201 – 756 p.

Стаття: надійшла до редколегії 15.09.2022

доопрацьована 05.10.2022

прийнята до друку 19.10.2022

COMPARISON OF h -ADAPTIVE FINITE ELEMENTS SCHEMES WITH DIFFERENT DEGREES ONE-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS

H. Kvasnytsya, P. Malashnyak, H. Shynkarenko

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, Ukraine,
e-mail: halyna.kvasnytsya@lnu.edu.ua*

Finite element method (FEM) is used for solving singularly perturbed boundary problems with second order differential equation. In order to calculate their approximate solutions we use h -adaptive FEM schemes with piecewise linear, quadratic and Hermite's cubic approximations. Analytically calculated compartmentalized systems of linear algebraic FEM equations with above approximations on finite element. While solving wide variety of practical problems using FEM it is important estimate precisely their approximate solutions and computing powers necessary for their solution. It is of great importance for the singularly perturbed boundary problems where accuracy of approximation solved by classical FEM methods is substantially decreased. The answer to this problem is to construct a posteriori error estimator for every solved FEM approximation. For each type of approximations offered a posteriori error estimate for FEM presented with equations for calculating mesh of energy norms of estimators on FEM. On their basis created iterative algorithm of mesh refinement with implementation non-equal divisions of areas of determination of finite element solutions which allows finding solution approximations with a priori set accuracy. The effectiveness of the developed adaptive schemes is illustrated through the numerical solution analysis for a model singular perturbed boundary value problems.

Key words: variational problem, irregular mesh, finite element method, quadratic and Hermite's cubic approximations, a posteriori error estimator, mesh refinement criterion, guaranteed approximation accuracy.