УДК 519.6

ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ПЕРІОДИЧНИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

М. Недашковський

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університеська, 1, Львів, 79000,
e-mail: mykola.nedashkovskyy@lnu.edu.ua

В циклі робіт авторами було запропоновані методи розв'язання для ряду матричних рівнянь, які найчастіше трапляються в практичних застосуваннях. Для їх побудови використано апарат матричних ланцюгових дробів. Були також одержані ефективні достатні ознаки збіжності [4] цих ітераційних схем до розв'язку рівнянь. Пропонуємо підхід, який допоможе суттєво уточнити умови, за яких обчислювальні схеми будуть збіжними. Він базується на перетворенні одноперіодичних матричних гіллястих ланцюгових дробів до матричних ланцюгових дробів із блочними елементами. Вдається одержати нову достатню ознаку збіжності до розв'язку ітераційних методів для поліноміальних матричних рівнянь $n-$го порядку. Проведено числові експерименти, які підверджують теоретичні міркування та практичну ефективність запропонованої схеми.

Ключові слова: матричні рівняння, критерії збіжності наближених методів до роз'язку, періодичні матричні ланцюгові дроби.

1. Вступ

Найпростіші матричні рівняння розв'язували ще у другій половині XIX століття [2], [3]. Через те, що не було загального підходу і методів розв'язання рівнянь вигляду

$$A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \ldots + A_1 X + A_0 = 0, \tag{1}$$

(тут коефіцієнти $A_i \in \mathbb{R}^{p\times p}(i = \overline{1,m})$ та невідомі $X \in \mathbb{R}^{p\times p}$ задані над кільцем некомутативних матриць), кожне рівняння розв'язували для конкретного часткового випадку.

2. Розвинення розв'язків матричних рівнянь у неперервні дроби

Для багатьох класів поліноміальних матричних півнянь вдається подати їхні розв'язки нескінченими матричними ланцюговими дробами [5], [6], а наближені значення одержати шляхом обчислення певної кількості поверхів дробу.

Наприклад, якщо ввести до розгляду матричне поліноміальне рівняння другого порядку

$$XAX + X + B = 0, \tag{2}$$

де A, B – квадратні ненульові матриці розмірності $p \times p$ із дійсними елементами, а $X \in \mathbb{R}^{p\times p}$ – невідома матриця, то після багатьох еквівалентних перетворень для розв'язку (2) одержуємо таке розвинення в одноперіодичний матричний ланцюговий дріб:

$$X = -\cfrac{E}{E - \cfrac{E}{E - \cfrac{E}{E - \ddots} \cdot BA} \cdot BA} \cdot B. \tag{3}$$

Розглядається також рівняння вигляду

$$AX^2 + BX + C = 0, \tag{4}$$

де A, B, C та X – матриці розмірності $p \times p$. Для розв'язку (4) одержують таке розвинення в матричний ланцюговий дріб:

$$X = -\cfrac{E}{B - A \cdot \cfrac{E}{B - A \cdot \cfrac{E}{B - A \cdot \cfrac{E}{B - \ddots} \cdot C} \cdot C} \cdot C} \cdot C \tag{5}$$

Для неканонічного матричного рівняння другого порядку

$$X^2A + XB + C = 0, \tag{6}$$

де – A, B, C і X, як і в попередньому випадку, є матрицями розміру $p \times p$, отримано розвинення розв'язку в неперервний матричний ланцюговий дріб

$$X = -C \cdot \cfrac{E}{B - C \cdot \cfrac{E}{B - C \cdot \cfrac{E}{B - C \cdot \cfrac{E}{B - \ddots} \cdot A} \cdot A} \cdot A} \tag{7}$$

Розв'язок симетричного квадратного рівняння другого порядку неканонічного вигляду

$$AX + XB + XFX + C = 0. \tag{8}$$

Тут A, B, C, F та X – матриці розміру $p \times p$, можна подати матричним ланцюговим дробом

$$X = -F^{-1}B + \cfrac{E}{A - F^{-1}B + \cfrac{E}{A - F^{-1}B + \ddots} \cdot (AF^{-1}B - C)F} \cdot (AF^{-1}B - C) \tag{9}$$

А для дискретного рівняння Ріккаті вигляду

$$A^TXA - X - A^TXB\big(R + B^TXB\big)^{-1}B^TXA + Q = 0, \tag{10}$$

де A, B, C, R, Q і X – матриці розміру $p \times p$, одержують розвинення у нескінчений двоперіодичний матричний неперервний дріб

$$X = Q + A^T \cdot \cfrac{E}{A^{-1}BR^{-1}B^T + A^{-1} \cfrac{E}{Q + A^T \cdot \cfrac{E}{A^{-1}BR^{-1}B^T + \ddots}}} \tag{11}$$

Розв'язок матричного поліноміального рівняння $n-$го порядку (1) може бути поданий одноперіодичним матричним гіллястим ланцюговим дробом [1] із $n-1$ гілками розгалуження

$$X = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} P_k \cdot \cfrac{E}{P_0 - Q_k + \sum\limits_{k=1}^{n-1} P_k \cdot \cfrac{E}{P_0 - Q_k + \ddots}} \tag{12}$$

Тут $P_k \in \mathbb{R}^{m\times m}(k = 0, 1, ...n-1)$ та $Q_k \in \mathbb{R}^{m\times m}(k = 1, 2, ...n-1)$ – квадратні матриці з невідомими елементами. Їхні значення є розв'язками системи лінійних алгебричних рівнянь [5], складених із коефіцієнтів рівняння.

Для матричного поліноміального рівняння n-го порядку неканонічного вигляду

$$X^n + X^{n-1}A_{n-1} + X^{n-2}A_{n-2} + ... + XA_1 + A_0 = 0, \tag{13}$$

де матриці $A_i \in \mathrm{R}^{p\times p} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$, $X \in R^{p\times q}$, а $n \geq 2$ – ціле число, може бути також поданий одноперіодичним матричним гіллястим ланцюговим дробом із $n-1$ гілками розгалуження

$$X = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \cfrac{E}{P_0 - Q_k + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \cfrac{E}{P_0 - Q_k + \ddots} \cdot P_k} \cdot P_k \tag{14}$$

Тут $P_0 \in R^{m\times m}$ та $Q_k \in R^{m\times m}(k = 1, 2, ..., n-1)$ – квадратні матриці з невідомими елементами. А їхні значення є розв'язками системи лінійних алгебричних рівнянь, складених із коефіцієнтів рівняння.

Наведені розвинення розв'язків мають формальний характер без детального вивчення збіжності відповідних матричних ланцюгових дробів.

3. Критерії збіжності

Звичайно ж для оцінки збіжності таких матричних дробів (3), (5), (7), (9), (11), (12), (14) можна застосовувати достатні ознаки [4], одержані раніше для матричних гіллястих ланцюгових дробів загального вигляду

$$\sum_{k_1=1}^{n} A_{k_{(1)}} \cfrac{E}{B_{k_{(1)}} + \sum\limits_{k_2=1}^{n} A_{k_{(2)}} \cfrac{E}{B_{k_{(2)}} + \ddots + \sum\limits_{k_m=1}^{n} A_{k_{(m)}} \cfrac{E}{B_{k_{(m)}} + \ddots} C_{k_{(m)}}} C_{k_{(2)}}} C_{k_{(1)}} \tag{15}$$

Тут $\mathbb{X}$ – банаховий простір квадратних матриць порядку $p \times p$ над полем коплесних чисел, $k_{(i)} = k_1 k_2 ... k_i$ – позначення для мультиіндексів, $A_{k_{(i)}}, B_{k_{(i)}}, C_{k_{(i)}} \in \mathbb{X}$ – це квадратні невироджені матриці розміру $p \times p$.

Теорема 1. *Якщо для* $\|X\| \in (0, \sum\limits_{k_1=1}^{n} \|A_{k_1}\| \left\|C_{k_{(s+1)}}\right\|]$ *існує, причому лише один розв'язок поліноміального матричного рівняння* (1), *то розвинення за ітераційною процедурою у МГЛД* (13) *з елементами, що задовольняють умови*

$$\left\|B_{k_{(s)}}^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 + \sum\limits_{k_{s+1}=1}^{n} \left\|A_{k_{(s+1)}}\right\| \left\|C_{k_{(s+1)}}\right\|} \quad (s = 1, 2, 3...) \tag{16}$$

збігається до цього розв'язку.

Ця ознака є матричним аналогом відомої теореми Прінгсгейма [10], [11] для звичайних ланцюгових дробів. Як свідчать числові експерименти, для описаного класу рівнянь реальні діапазони збіжності ітераційних процедур суттєві ширші від теоретичних.

Періодичні ланцюгові [9], [11], [12] і матричні ланцюгові дроби, крім того, що є окремим цікавим об'єктом для досліджень, ще мають великі перспективи в обчислювальних застосуваннях. Тому розглянемо їх докладніше.

Означення 3. *Неперервний дріб*

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_k}{b_k + \cfrac{a_1}{b_1 + \ddots + \cfrac{a_k}{b_k + \cfrac{a_1}{b_1 + \ddots}}}}}} \tag{17}$$

називається періодичним ланцюговим дробом.

Надалі будемо вважати $a_1, a_2, \cdots, a_k$ відмінними від нуля і прагнутимемо сформулювати умови збіжності, а також значення дробу у випадку його збіжності.

Теорема 2. *Ланцюговий дріб*

$$1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{a}{1 + \ddots}}} \tag{18}$$

збігається [12] за винятком того випадку, коли $a = -\dfrac{1}{4} - c$, *де* c *– дійсне ціле число. А якщо збігається, то до значення* $\frac{1}{2}$, *позаяк* $a = -\dfrac{1}{4}$ *і дорівнює одному із значень*

$$\frac{-1 \pm (1+4a)^{1/2}}{2},$$

яке має більший модуль, якщо $a \neq -\dfrac{1}{4}$.

Інформації про дослідження збіжності гіллястих періодичних дробів практично немає. Тому цей аспект теорії розглядати не будемо. Розглянемо збіжності матричних ланцюгових дробів.

Тут відразу варто зауважити, що формальні узагальнення не дають результату – дослідження збіжності періодичного дробу за класичною схемою [12] зводиться до точного розв'язання квадратного матричного рівняння. А це сама собою задача не набагато простіша від збіжності дробів. Проте для цієї мети можна скористатися принципом мажорації, описаним у [5], дещо модифікувавши його з врахуванням специфіки періодичних матричних ланцюгових дробів.

На початку розглянемо деякі поняття і означення. Нехай $\mathbb{X}$ – банахова алгебра квадратних матриць порядку p над полем $\mathbb{C}$.

Означення 4. *Неперервний дріб*

$$\cfrac{E}{B_1 + \cfrac{E}{B_2 + \ddots + \cfrac{E}{B_k + \cfrac{E}{B_1 + \cfrac{E}{B_2 + \ddots + \cfrac{E}{B_k + \ddots}A_k}A_2}A_1}A_k}A_2}A_1 \tag{19}$$

називатимемо періодичним матричним ланцюговим дробом.

Тут $A_i, B_i \in \mathbb{X}$ – квадратні невироджені $p \times p$ матриці. Надалі вважатимемо $A_1, A_2, \cdots, A_k$ відмінними від нуля.

Означення 5. *Періодичний МЛД називається абсолютно збіжним, якщо збігається наступний ряд, складений з його підхідних дробів*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \|D_{\nu+1} - D_\nu\|. \tag{20}$$

Означення 6. *Будемо говорити, що один періодичний МЛД* G *мажорує інший МЛД* D, *якщо існує таке невід'ємне ціле число* n_0 *і деяка додатна стала* M, *що для всіх цілих* n *та* m *таких, що* $n \geq n_0$ *і* $m \geq n_0$ *виконується співвідношення*

$$\|D_n - D_m\| \leq M \|G_n - G_m\|, \tag{21}$$

де D_i, G_i *– підхідні дроби нескінчених МЛД* D *та* G, *відповідно.*

У вигляді часткового випадку можна переформулювати теорему мажорації гіллястих лацюгових матричних дробів [4] так.

Теорема 3 (Ознака мажорації). *Якщо для періодичного МЛД (19) виконується умова вигляду (21) та існує такий абсолютно збіжний числовий ланцюговий дріб*

$$\hat{b}_0 + \mathop{D}_{s=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i} \tag{22}$$

із знакосталими частинними чисельниками, що

$$\begin{cases} \hat{D}_{s,m}^{-1} \geq \left\| D_{s,m}^{-1} \right\| > 0; & s = 1, 2, ...; \ m = s+1; s+2, ..., \\ \|A_s\| \leq |\hat{a}_s|\,; & s = 1, 2, ..., \end{cases} \tag{23}$$

то цей МЛД також абсолютно збіжний.

Таке твердження можна використовувати для дослідження періодичних МЛД. Як приклад застосування принципу мажорації розглянемо одноперіодичний матричний ланцюговий дріб

$$E + \cfrac{E}{E + \cfrac{E}{E + \cfrac{E}{E + \ddots} \cdot A} \cdot A} \cdot A \tag{24}$$

Теорема 4. *Якщо для одноперіодичного МЛД (24) існує таке додатне число a, що виконується умова*

$$\|A\| < a, \tag{25}$$

то цей дріб абсолютно збіжний.

Доведення. Введемо до розгляду числовий ланцюговий дріб

$$\hat{D} = 1 - \cfrac{a}{1 - \cfrac{a}{1 - \cfrac{a}{1 - \ddots}}} \tag{26}$$

з позитивними елементами a.

Спочатку доведемо виконання нерівності (25)

$$\begin{cases} \hat{D}_{s,m}^{-1} \geq \left\| D_{s,m}^{-1} \right\| > 0; & s = 1, 2, ...; \ m = s+1; s+2, ..., \\ \|A_s\| \leq |\hat{a}_s|\,; & s = 1, 2, ..., \end{cases}$$

Справді, оскільки $\hat{a}_s = -a$ для всіх $s = 1, 2, \cdots$, то $\|A_s\| \leq |\hat{a}_s|$ виконується згідно з умовою. Доведемо тепер по індукції виконання нерівності $\hat{D}_{s,m}^{-1} \geq \left\| D_{s,m}^{-1} \right\| > 0$. Насправді, для $s = m$ матимемо

$$\|D_{m,m}\| = \|E\| = 1 = \hat{D}_{m,m}.$$

Нехай тепер $0 < \left\| D_{k,m}^{-1} \right\| \leq \hat{D}_{k,m}^{-1}$. Тоді

$$\left\| D_{k-1,m}^{-1} \right\| = \left\| (E + D_{k,m}^{-1} A)^{-1} \right\| = \left\| \sum_{j=o}^{\infty} (-D_{k,m}^{-1} A)^j \right\| \leq \sum_{j=o}^{\infty} (\left\| D_{k,m}^{-1} \right\| \|A\|)^j \leq$$
$$\leq \sum_{j=o}^{\infty} \left| \hat{D}_{km}^{-1} \hat{a}_{k)} \right|^j = \sum_{j=o}^{\infty} (\hat{D}_{km}^{-1} a)^j = \frac{1}{1 - \hat{D}_{k,m}^{-1} \hat{a}_k} = \hat{D}_{k-1,m}^{-1}.$$

Що й треба було довести. □

Твердження, доведені в теоремах, дають змогу суттєво послабити умови, за яких можлива збіжність періодичних гіллястих і матричних гіллястих ланцюгових дробів.

Розглянемо тепер $k-$періодичний матричний ланцюговий дріб неканонічного вигляду записаний для компактності у формі Роджерса [9]

$$\begin{aligned} D = A_1 \cdot \frac{E}{B_1} \cdot C_1 \ + \ A_2 \cdot \frac{E}{B_2} \cdot C_2 \ + \cdots + \ A_k \cdot \frac{E}{B_k} \cdot C_k \ + \\ + \ A_1 \cdot \frac{E}{B_1} \cdot C_1 \ + \ A_2 \cdot \frac{E}{B_2} \cdot C_2 \ + \cdots + \ A_k \cdot \frac{E}{B_k} \cdot C_k \ + \ldots \end{aligned} \tag{27}$$

Тут також можна переформулювати теорему мажорації неканонічних гіллястих лацюгових матричних дробів із попереднього параграфа у вигляді.

Теорема 5 (Ознака мажорації). *Якщо для МЛД* (27) *існує такий абсолютно збіжний числовий ланцюговий дріб*

$$\hat{b}_0 + \underset{s=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_i}{b_i} \tag{28}$$

із знакосталими частинними чисельниками, що

$$\begin{cases} \hat{D}_{s,m}^{-1} \geq \left\| D_{s,m}^{-1} \right\| > 0; \quad s = 1, 2, ...; \ m = s + 1; s + 2, ..., \\ \|A_s\| \, \|C_s\| \leq |\hat{a}_s| \, ; \qquad s = 1, 2, ..., \end{cases} \tag{29}$$

то цей неканонічний періодичний МЛД також абсолютно збіжний.

Як приклад застосування принципу мажорації для цього вигляду дробів розлянемо одноперіодичний матричний ланцюговий дріб

$$E + A \cdot \cfrac{E}{E + A \cdot \cfrac{E}{E + A \cdot \cfrac{E}{E + \ddots} \cdot C} \cdot C} \cdot C \tag{30}$$

Теорема 6. *Якщо для МЛД* (30) *існує таке додатне число* a, *що виконується умова*

$$\|A\| \, \|C\| < a, \tag{31}$$

то цей дріб абсолютно збіжний.

Таблиця 1

Результати обчислення для числового експерименту 1

Кількість поверхів	$\|X_k - X_{k-1}\|$
5	5.876449e-01
7	6.992783e-02
9	9.843659e-03
14	8.851078e-05
18	1.872369e-06
21	1.038970e-07
23	1.529269e-08
26	8.646308e-10
33	1.049942e-12
35	1.555262e-13

Доведення цієї теореми проводиться за схемою аналогічною до доведення теореми 4.

Введемо тепер до розгляду матричний одноперіодичний гіллястий дріб

$$B_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \cfrac{E}{B_k + \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cdot \cfrac{E}{B_k + \ddots} \cdot C_k} \cdot C_k \tag{32}$$

Тут $A_i, B_i, C_i \in \mathbb{X}$ – квадратні невироджені $p \times p$ матриці. Надалі будемо вважати $A_1, A_2, \cdots, A_n$ відмінними від нуля.

Приклад 1. *В середовищі пакета MatLab проведено числовий експеримент з дослідження швидкості збіжності дробу утвореного за рекурентною формулою*

$$X = B_0 + A_1 \cdot \frac{E}{B_1 + X} \cdot C_1 + A_2 \cdot \frac{E}{B_2 + X} \cdot C_2;$$

з матричними коефіцієнтами

$$B_0 = \begin{pmatrix} 12.7 & -7.3 & -5 \\ 0.22 & 8.1 & 12.5 \\ 9.22 & -10.234 & -0.2 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 0.5 & 1.22 & -2.51 \\ 0.234 & -0.13 & 2.2 \end{pmatrix};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 0.2 \\ 1.236 & -1.33 & 7.232 \\ -8.256 & 1.1 & 1.267 \end{pmatrix}; \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 1.6 & -5.2 \\ 0.15 & 2.22 & -1.51 \\ 1.234 & 0.413 & 2.2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2.1 & 6 & 5 \\ 0.5 & -1.22 & 2.51 \\ -0.234 & 5.13 & -2.2 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1.5 & 1 & 2.2 \\ 1.236 & -1.33 & 0.232 \\ -0.256 & 1.1 & 1.267 \end{pmatrix};$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0.6 & 1.5 \\ 1.5 & 1.322 & 1.051 \\ 1.234 & 1.513 & 1.29 \end{pmatrix}.$$

Результати чисельного експерименту у початковому наближенні

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

подані в табл. 1.

У підсумку одержано таке наближене значення X:

$$X_k = \begin{pmatrix} 11.1156 & -7.4563 & -6.7028 \\ 0.9431 & 8.3674 & 12.1098 \\ 7.2984 & -10.7480 & -0.3390 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку $\|B^{-1}\| = 2.318533e - 01$ *і* $(1 + \|a_1\| + \|a_2\|)^{-1} = 1.220035e - 02$. *Хоча матрична ознака збіжності типу Прінгсгейма знову не виконується – швидкість збіжності досить висока.*

Теорема 7. *Якщо для одноперіодичного гіллястого ланцюгового дробу* (32) *виконується умова*

$$\det(D_{k,\infty}) \neq 0, \quad (i = 1, 2, ...; \quad k = 1, 2, ..., n), \tag{33}$$

то існує еквівалентний йому одноперіодичний матричний ланцюговий дріб із блочними елементами.

Доведення. Дріб (32) є композицією [10] дробово-лінійних перетворень

$$T(w_{i+1}) = B_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \Big(B_k(w_i) \Big)^{-1} \cdot C_k \ \ (i = 1, 2, ...n) \tag{34}$$

Враховуючи, що правильні матричні співвідношення

$$\begin{aligned} &diag(P_i + Q_i) = diag(P_i) + diag(Q_i) \quad (i = 1, 2, ..., n) \\ &diag(\lambda \cdot P_i) = \lambda \cdot diag(P_i) \qquad\qquad (i = 1, 2, ..., n) \\ &[diag(P_i)]^{-1} = diag(P_i^{-1}) \qquad\qquad (i = 1, 2, ..., n), \end{aligned} \tag{35}$$

дробово-лінійні перетворення (34) можна подати у матричній формі

$$T(w_{i+1}) = B_0 + \Big(A_1, A_2, ..., A_n\Big) \cdot diag\Big[\Big(B_i + T(w_i)\Big)^{-1}\Big] \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ ... \\ C_n \end{pmatrix} \ (i = \overline{1, n}).$$

Або ж

$$T(w_{i+1}) = B_0 + \Big(A_1, A_2, ..., A_n\Big) \cdot diag\Big[\Big(B_i + T(w_i)\Big)\Big]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ ... \\ C_n \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Чи у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} T(w_{i+1}) = B_0 + \Big(A_1, A_2, ..., A_n\Big) \times \\ \times \begin{pmatrix} B_1 + T(w_i) & 0 & ... & 0 \\ 0 & B_2 + T(w_i) & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & B_n + T(w_i) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ ... \\ C_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{37}$$

Звідки

$$T(w_{i+1}) = B_0 + \Big(A_1, A_2, ..., A_n\Big) \cdot \left[\begin{pmatrix} B_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & B_2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & B_n \end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} E & 0 & ... & 0 \\ 0 & E & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & E \end{pmatrix} \cdot T(w_i) \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ ... \\ C_n \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$T(w_{i+1}) = B_0 + \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_n \end{pmatrix} \cdot \Big[diag(B_k) + E \cdot T(w_i)\Big]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ ... \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Із врахуванням (36) і (38) дріб (32) перепишеться у вигляді такого матричного ланцюгового дробу

$$B_0 + \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_n \end{pmatrix} \cdot \left(E \cdot B_0 + diag(B_k) + \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_n \end{pmatrix} \times \right.$$
$$\left. \times \Big(E \cdot B_0 + diag(B_k) + ...\Big)^{-1} \begin{pmatrix} C_1 \\ ... \\ C_n \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} C_1 \\ ... \\ C_n \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Що й треба було довести. □

Теорема 8. *Якщо для* $\|X\| \in \Big(0, \big\|(A_1, A_2, \dots, A_n)\big\| \, \big\|(C_1, C_2, \dots, C_n)\big\|\Big)$ *існує, причому лише один розв'язок деякого поліноміального матричного рівняння, то розвинення за ітераційною процедурою* (34) *у МГЛД з елементами, що задовольняють умови*

$$\Big\| \big(E \cdot B_0 + diag(B_1, B_2, \dots, B_n)\big)^{-1} \Big\| \leq$$
$$\leq \frac{1}{1 + \|(A_1, A_2, \dots, A_n)\| \, \|(C_1, C_2, \dots, C_n)\|} \quad (s = 1, 2, \dots), \tag{40}$$

збігається до цього розв'язку

Доведення. Якщо застосувати матричний аналог ознаки Прігсгейма з теореми 1 до матричного ланцюгового дробу (38) з блочними елементами одразу, то отримуємо умову (40). □

Приклад 2. *В середовищі пакета MatLab проведено числовий експеримент з практичного дослідження коректності твердження теореми 7. Для*

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3.4 \\ 1.22 & 5.1 & 2.5 \\ 1.22 & -2.1234 & -3.2 \end{pmatrix}; A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 0.5 & 1.22 & -2.51 \\ 0.234 & -0.13 & 2.2 \end{pmatrix};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2.5 & 1 & 0.2 \\ 1.236 & -1.33 & 7.232 \\ -8.256 & 1.1 & 1.267 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 0.5 & -1.22 & 2.51 \\ -0.234 & 5.13 & -2.2 \end{pmatrix};$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -12.5 & 1 & 20.2 \\ 10.236 & -11.33 & 70.232 \\ -2.256 & 11.1 & 15.267 \end{pmatrix}$$

обчислення проводили за рекурентною формулою

$$X = B_0 + \begin{pmatrix} E & E \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_1 + X & 0 \\ 0 & B_2 + X \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Результати чисельного експерименту у початковому наближенні

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

подано в табл. 2.

Таблиця 2

Результати обчислення для числового експерименту 2

Кількість поверхів	$\|X_k - X_{k-1}\|$
4	1.678430e-01
5	3.266798e-03
7	9.919585e-06
10	3.086268e-09
12	1.455713e-11
13	1.000581e-12
14	6.772405e-14

У підсумку одержано таке наближене значення X*:*

$$X_k = \begin{pmatrix} 20.4332 & -8.8879 & -4.4330 \\ 0.1974 & 11.1223 & 12.5611 \\ 10.2910 & -100.3508 & -0.3699 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку $\|B^{-1}\| = 8.133122e - 02 =$ *і* $(1 + \|a_1\| + \|a_2\|)^{-1} = 5.482948e - 02.$ *Хоча матрична ознака збіжності типу Прінгсгейма і не виконується – швидкість збіжності є досить висока.*

Виявляється, що в багатьох практичних застосуваннях замість двоперіодичних дробів можна використовувати рекурентні співвідношення, які приводять до запису роз'язків одноперідичними ланцюговими дробами.

Для підтвердження цього факту розглянемо двоперіодичний матричний ланцюговий дріб, який одержують на підставі дробово-лінійного перетворення

$$s = s(w) = \frac{E}{B_1 + \dfrac{E}{B_2 + w} \cdot A_2} \cdot A_1. \tag{41}$$

Це перетворення можна також подати так

$$s(w) = \big(B_1 + (B_2 + w)^{-1} A_2\big)^{-1} (B_2 + w)^{-1} (B_2 + w) A_1 =$$
$$= \big((B_2 + w) B_1 + (B_2 + w)(B_2 + w)^{-1} A_2\big)^{-1} (B_2 + w) A_1.$$

Або

$$s(w) = \big((B_2 + w) B_1 + A_2\big)^{-1} (B_2 + w) A_1 =$$
$$= \big((B_2 + w) B_1 + A_2\big)^{-1} \big[(B_2 + w) B_1 B_1^{-1} A_1 + A_2 B_1^{-1} A_1 - A_2 B_1^{-1} A_1\big].$$

І далі

$$s(w) = \big((B_2 + w) B_1 + A_2\big)^{-1} \big[(B_2 + w) B_1 + A_2 - A_2\big] B_1^{-1} A_1 =$$
$$= B_1^{-1} A_1 - \big((B_2 + w) B_1 + A_2\big)^{-1} A_2 B_1^{-1} A_1.$$

Отже, одержуємо такий закон композиції

$$s(w) = B_1^{-1} A_1 - \frac{E}{A_2 + B_2 B_1 + w B_1} \cdot A_2 B_1^{-1} A_1. \tag{42}$$

Одержаний результат суттєво полегшує аналіз збіжності ітераційних процесів, які отримують на підставі застосування дробово-лінійних перетворень вигляду (42) і дають розвинення у двоперіодичні матричні неперервні дроби.

Таблиця 3

Результати обчислення для числового експерименту 3

Кількість поверхів	$\lVert X_k - X_{k-1} \rVert$
6	9.898141e-01
7	7.056699e-04
10	9.853182e-06
11	1.281833e-07
12	7.029520e-09
25	9.309512e-11
40	4.772174e-12

Приклад 3. *За допомогою пакета MatLab проводили розрахунки за формулами*

$$X = B_0 + \Big(B_1 + (B_2 + X)^{-1} A_2\Big)^{-1} A_1;$$

та

$$X = B_0 + B_1^{-1} A_1 - \Big(A_2 + B_2 B_1 + X B_1\Big)^{-1} A_2 B_1^{-1} A_1$$

із матричними коефіцієнтами

$$B_0 \begin{pmatrix} 4.25 & -3 & -3.4 \\ 1.22 & 5.1 & 2.5 \\ 1.22 & -2.1234 & -3.2 \end{pmatrix}; A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 0.5 & 1.22 & -2.51 \\ 0.234 & -0.13 & 2.2 \end{pmatrix};$$

$$B_1 \begin{pmatrix} -2.5 & 1 & 0.2 \\ 1.236 & -1.33 & 7.232 \\ -8.256 & 1.1 & 1.267 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 0.5 & -1.22 & 2.51 \\ -0.234 & 5.13 & -2.2 \end{pmatrix};$$

$$B_2 \begin{pmatrix} -12.5 & 1 & 20.2 \\ 10.236 & -11.33 & 70.232 \\ -2.256 & 11.1 & 15.267 \end{pmatrix}.$$

На підставі обчислень у початковому наближенні

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

одержано результати подані в табл. 3

В обох випадках одержано однакові значення підхідних дробів $2i-$го та $i-$го порядків, відповідно, та остаточне значення

$$X_k = \begin{pmatrix} 40.5136 & 109.4032 & -109.8997 \\ 219.0145 & 679.5859 & -634.9544 \\ 25.6099 & 73.3453 & -74.6716 \end{pmatrix}.$$

4. Висновки

Наведені теоретичні дослідження і числові експерименти підтверджують, що з викорстанням теорії перідичних ланцюгових дробів вдається суттєво послабити умови збіжності матричних ланцюгових дробів в цілому та уточнити критерії збіжності до розв'язку ітераційних схем для матричних рівнянь побудованих на їхній підставі.

Список використаної літератури

1. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби / Д.И. Боднар. – Київ: Наукова думка, 1986. – 176 с.
2. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений / Х.Д. Икрамов. – Москва: Наука, 1984. – 192 с.
3. Казимірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники // П.С. Казимірський. – Київ: Наукова думка, 1983. – 247 с.
4. Недашковський М.О. Ознаки збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів / М.О. Недашковський // Математичні методи та фізико-механічні поля. – Львів. – 2003.– Том 46, № 4. – С. 50–56.
5. Nedashkovskyy M.O. Solving of non-linear polynomial equation by branching chain fractions / M.O. Nedashkovskyy // "Computing". – International Scientific Journal. – ISSN 1727-6209. – 2003. – Vol. 2, Issue 1.
6. Nedashkovskyy N.A. Solution of one class of nonlinear balance models of intersectoral ecological-economic interactions / N.A. Nedashkovskyy, T.I. Kroshka //Springer Science+Busines Media. Inc. 1060-0396/11/4705-0684 ©2011. – Cybernetics and Systems Analysis. – 2011. – Vol. 47, Issue 5. – P. 684–694.
7. Недашковський М.О. Дослідження збіжності періодичних матричних ланцюгових дробів / М.О. Недашковський // Праці міжнародної наукової школи-семінару "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLII)". – Присвяченої 85-річчю від дня народження академіка В.С. Михалевича. – Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2015. – с. 74–75.

8. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике / В.Я. Скоробогатько. – Москва: Наука, 1983. – 311с.
9. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа / А.Н. Хованский. – Москва: ГИИТЛ, 1956. – 212 с.
10. Jones W.B. Continued fractions: analytic theory and applications / W.B. Jones, W.J. Thron // Encyclopedia of Mathematics and its Applications 11. – Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1980. – 428 p.
11. Lorentzen L. Continued fractions with applications / L. Lorentzen, H. Waadeland. – Amsterdam: Elsevier Publishers B.V., 1992. – 606 p.
12. Wall H.S. Analytic theory of continued fractions // H.S. Wall. – New-York: 1948, 433 p.

Стаття: надійшла до редколегії 01.09.2022
доопрацьована 29.09.2022
прийнята до друку 05.10.2022

TO THE SOLUTION OF MATRIX EQUATIONS BY PERIODIC CONTINUED FRACTIONS

M. Nedashkovskyy

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, Ukraine
e-mail: mykola.nedashkovskyy@lnu.edu.ua

In the cycle of works, the authors proposed solution methods for a number of matrix equations that are most often found in practical applications. For their construction, the apparatus of matrix continued fractions was used. This direction made it possible to build iterative procedures for the approximate calculation of solutions of matrix equations. In addition, it is possible to obtain an analytical record of the solution of the equation in the form of an expansion into an infinite periodic matrix branched continued fraction and to study its properties. Effective and sufficient signs of the convergence of these iterative schemes to the solution of the equations were also obtained. However, these features were based on the use of properties of the general appearance of branched fractions, which are non-periodic in the general case. This paper proposes an approach that allows you to significantly specify the conditions under which the computational process of finding a solution will converge. It is based on the proposed transformations of one-period matrix branched continued fractions with n branching branches to equivalent matrix continued fractions with block elements.Thanks to this, it is possible to obtain new sufficient signs of convergence of periodic branched matrix continued fractions of the general form with n branching branches. This is achieved by constructing majoring continued fractions with numerical elements and then using the corresponding numerical signs of convergence of ordinary periodic continued fractions. The obtained results were applied to the calculation of approximate solutions of n-th order polynomial matrix equations of the general form. A number of numerical experiments have been conducted that confirm the theoretical considerations and practical effectiveness of the proposed scheme.

Key words: matrix equations, convergence criteria of approximate methods to solution, periodic matrix continued fractions.