УДК 519.6

УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ХОВАНСЬКОГО ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОБІЧНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

А. Недашковська

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університеська, 1, Львів, 79000,
e-mail: anastasiya.nedashkovska@lnu.edu.ua

Матричні рівняння доволі широко використовуються у задачах оптимізації систем керування Однак загального підходу до розв'язування задач цього класу не існує. В одній із попередніх публікацій було узагальнено метод Хованського для побудови ітераційної схеми розв'язування поліноміальних матричних рівнянь. У даній публікації буде запропоновано застосувати схожу обчислювальну схему до розв'язування однобічних матричних рівнянь вигляду $X^nA_n+X^{n-1}A_{n-1}+\ldots+X^2A_2+XA_1+A_0=0$. Наведена рекурентна формула для обчислення наближеного розв'язку рівнянь у вигляді ланцюгового матричного дробу. Досліджено збіжність запропонованого методу. Подано результати чисельних експериментів, що підтверджують теоретичні викладення та ефективність запропонованої схеми.

Ключові слова: ітераційний метод, матричні рівняння, однобічні поліноміальні матричні рівняння, метод Хованського.

1. Вступ

Багато видатних математиків минулого широко використовували апарат неперервних ланцюгових дробів у своїх дослідженнях і доклали чимало зусиль для його розвитку і вдосконалення. Ще на початку двадцятого століття цей розділ аналізу в тій чи іншій формі входив у навчальні програми математичних спеціальностей фактично всіх університетів [8]. В останні десятиліття цей ефективний метод аналітичних досліджень знову привернув увагу спеціалістів головно тим, що з допомогою ланцюгових дробів вдається отримати хороше наближення аналітичних функцій. Попри те, неперервні ланцюгові дроби знайшли своє застосування і для розв'язування алгебричних задач [3].

Розглянемо поліноміальне матричне рівняння

$$X^nA_n+X^{n-1}A_{n-1}+X^{n-2}A_{n-2}+\ldots+X^2A_2+XA_1+A_0=0 \tag{1}$$

і застосуємо до нього схему запропоновану у [3]. Тут матриці $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$, A_{n-1}, $A_n \in R^{m\times m}$ – задані коефіцієнти рівняння (1), а матриця $X \in R^{m\times m}$ – невідомий розв'язок.

2. Обчислювальна схема методу

Нехай X – невироджена $m\times m$ матриця. Введемо позначенння $Y_0 = X^{-1}$. Рівність (1) помножимо зліва на X^{-1} і отримаємо

$$X^{n-1}A_n+X^{n-2}A_{n-1}+X^{n-3}A_{n-2}+\ldots+XA_2+A_1+Y_0A_0=0. \tag{2}$$

Позначимо тепер $Y_1 = X^{-1}Y_0 = \left(X^{-1}\right)^2$ і помножимо рівняння (2) зліва на X^{-1}

$$X^{n-2}A_n + X^{n-3}A_{n-1} + X^{n-4}A_{n-2} + \ldots + A_2 + Y_0A_1 + Y_1A_0 = 0.$$

Відповідно, після $(n-2)$ множень зліва на X^{-1} рівняння (1) отримаємо

$$X^2A_n + XA_{n-1} + A_{n-2} + Y_0A_{n-3} + \ldots + Y_{n-5}A_2 + Y_{n-4}A_1 + Y_{n-3}A_0 = 0, \tag{3}$$

де

$$Y_0 = \left(X^{-1}\right)^1, Y_1 = \left(X^{-1}\right)^2, \ldots, Y_{n-3} = \left(X^{-1}\right)^{n-2}.$$

Введемо параметр, – деяку невироджену матрицю $L \in R^{m\times m}$ і помножимо справа рівняння (3) на цей параметр L

$$X^2A_nL+XA_{n-1}L+A_{n-2}L+Y_0A_{n-3}L+\ldots+Y_{n-5}A_2L+Y_{n-4}A_1L+Y_{n-3}A_0L = 0 \tag{4}$$

Очевидно, що рівняння (4) еквівалентне

$$X^2A_nL + XA_{n-1}L + XK - XK + A_{n-2}L + Y_0A_{n-3}L + \ldots + Y_{n-5}A_2L+$$
$$+Y_{n-4}A_1L + Y_{n-3}A_0L = 0.$$

Тут $K \in \Re^{m\times m}$ – невироджена матриця.

Легко бачити, що

$$X^2A_nL + XK = XK - XA_{n-1}L - A_{n-2}L - Y_0A_{n-3}L - \ldots - Y_{n-4}A_1L - Y_{n-3}A_0L$$

або

$$X\left(XA_nL + K\right) = X\left(K - A_{n-1}L\right) - A_{n-2}L - \ldots - Y_{n-4}A_1L - Y_{n-3}A_0L.$$

Тоді, припускаючи, що $\det\left(XA_nL + K\right) \neq 0$, отримуємо

$$X = \left[X\left(K - A_{n-1}L\right) - A_{n-2}L - \ldots - Y_{n-4}A_1L - Y_{n-3}A_0L\right]\left(XA_nL + K\right)^{-1}. \tag{5}$$

Розглянемо таку тотожність

$$X^{-1}\left(XA_nL + K\right) = A_nL + Y_0K.$$

Звідси

$$X^{-1}XA_nL + X^{-1}K = A_nL + Y_0K. \tag{6}$$

Тоді з (6) отримаємо

$$Y_0\left(XA_nL + K\right) = A_nL + Y_0K$$

або

$$Y_0 = \left(A_nL + Y_0K\right)\left(XA_nL + K\right)^{-1}. \tag{7}$$

Застосовуючи схожі перетворення, отримуємо формули для обчислення Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_{n-3}

$$\begin{aligned}
&Y_1 = \left(Y_0A_nL + Y_1K\right)\left(XA_nL + K\right)^{-1};\\
&Y_2 = \left(Y_1A_nL + Y_2K\right)\left(XA_nL + K\right)^{-1};\\
&\vdots\\
&Y_{n-3} = \left(Y_{n-2}A_nL + Y_{n-3}K\right)\left(XA_nL + K\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Далі, використовуючи формули (5),(7) і (8), отримуємо алгоритм для обчислення розв'язків поліноміального матричного рівняння (1).

1. Задати похибку $\varepsilon > 0$.
2. Задати початкове наближення, невироджену матрицю $X^{(0)} \in R^{m\times m}$.
3. Визначити лічильник $n = 1$.
4. Обчислити
$$Y_0^{(0)} = \left(X^{(0)^{-1}}\right)^1, Y_1^{(0)} = \left(X^{(0)^{-1}}\right)^2,$$
$$Y_2^{(0)} = \left(X^{(0)^{-1}}\right)^3, \ldots, Y_{n-3}^{(0)} = \left(X^{(0)^{-1}}\right)^{n-2}.$$
5. Обчислити
$$\begin{aligned} Y_0^{(n)} &= \left(A_nL + Y_0^{(n-1)}K\right)\left(X^{(n-1)}A_nL + K\right)^{-1};\\ Y_1^{(n)} &= \left(Y_0^{(n)}A_nL + Y_1^{(n-1)}K\right)\left(X^{(n-1)}A_nL + K\right)^{-1};\\ Y_2^{(n)} &= \left(Y_1^{(n)}A_nL + Y_2^{(n-1)}K\right)\left(X^{(n-1)}A_nL + K\right)^{-1};\\ &\vdots\\ Y_{n-3}^{(n)} &= \left(Y_{n-2}^{(n)}A_nL + Y_{n-3}^{(n-1)}K\right)\left(X^{(n-1)}A_nL + K\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{9}$$
6. Обчислити $\tilde{A}_0 = A_{n-2} + Y_0A_{n-3} + \ldots + Y_{n-5}A_2 + Y_{n-4}A_1 + Y_{n-3}A_0$.
7. Нехай $\tilde{A}_2 = A_n,\ \tilde{A}_1 = A_{n-1}$, тоді
$$X^{(n)} = \left(X^{(n-1)}K - \tilde{A}_0L\right)\left(X^{(n-1)}\tilde{A}_2L + \tilde{A}_1L + K\right)^{-1}\ (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$
8. Перевірити умову $\left\|X^{(n)} - X^{(n-1)}\right\| < \varepsilon$. Якщо умова не задовольняється, то визначити лічильник $n = n + 1$ і перейти на крок 5, інакше повернути $X^{(n)}$.

3. Збіжність схеми розв'язування однобічних поліноміальних матричних рівнянь

Розглянемо рівняння
$$X^2A_2 + XA_1 + A_0 = 0. \tag{11}$$

Як і у випадку рівняння (3), помножимо рівняння (11) справа на деяку невироджену діагональну матрицю $L = l \cdot E, L \in R^{m\times m}$
$$X^2A_2L + X\left(A_1L + K - K\right) + A_0L = 0$$
$$X\left(XA_2L + A_1L + K\right) = XK - A_0L. \tag{12}$$
Тут $K = k \cdot E, K \in R^{m\times m}$ – невироджена діагональна матриця.

Нехай $\det\left(XA_2L + A_1L + K\right) \neq 0$, тоді з (12) отримуємо
$$X = \left(XK - A_0L\right)\left(XA_2L + A_1L + K\right)^{-1}$$
або у вигляді рекурентної формули
$$X^{(n)} = \left(X^{(n-1)}K - A_0L\right)\left(X^{(n-1)}A_2L + A_1L + K\right)^{-1}\ (n = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Нехай A і B – дійсні матриці розмірності $m \times m$, причому $\det B \neq 0$. Надалі операцію множення $B^{-1}A$ будемо записувати у вигляді матричного ділення $\frac{A}{B}$.

Тоді

$$X = \frac{XK - A_0L}{XA_2L + A_1L + K} = \frac{kX - lA_0}{lXA_2 + lA_1 + kE} = \frac{X - \frac{l}{k}A_0}{\frac{l}{k}XA_2 + \frac{l}{k}A_1 + E} =$$

$$= \frac{X - \frac{l}{k}A_0}{\left(X + A_1A_2^{-1} + \frac{k}{l}A_2^{-1}\right)\frac{l}{k}A_2} = \frac{X \pm A_1A_2^{-1} \pm \frac{k}{l}A_2^{-1} - \frac{l}{k}A_0}{\left(X + A_1A_2^{-1} + \frac{k}{l}A_2^{-1}\right)\frac{l}{k}A_2} =$$

$$= \frac{k}{l}A_2^{-1} - \frac{A_1A_2^{-1} + \frac{k}{l}A_2^{-1} + \frac{l}{k}A_0}{\left(X + A_1A_2^{-1} + \frac{k}{l}A_2^{-1}\right)\frac{l}{k}A_2} = \frac{k}{l}A_2^{-1} - \frac{A_1A_2^{-1} + \frac{k}{l}A_2^{-1} + \frac{l}{k}A_0}{\left(X + A_1A_2^{-1} + \frac{k}{l}A_2^{-1}\right)\frac{l}{k}A_2} =$$

$$= \left(E - \frac{A_1A_2^{-1} + \frac{k}{l}A_2^{-1} + \frac{l}{k}A_0}{X + A_1A_2^{-1} + \frac{k}{l}A_2^{-1}}\right)\frac{k}{l}A_2^{-1}.$$

Нехай $P := A_1A_2^{-1} + \frac{k}{l}A_2^{-1}$, а $Q := \frac{l}{k}A_0$, тоді

$$X = \left(E - \frac{P+Q}{X+P}\right)\frac{k}{l}A_2^{-1},$$

або у вигляді нескінченного матричного дробу

$$X = \left(E - \frac{P+Q}{P+E-\frac{P+Q}{P+E-\ldots}}\right)\frac{k}{l}A_2^{-1}. \tag{14}$$

Матричний ланцюговий дріб (14) також можна подати у компактній формі Прінсгейма

$$X = \left(E - \frac{P+Q|}{|P+E} - \frac{P+Q|}{|P+E} - \frac{P+Q|}{|P+E} - \ldots\right)\frac{k}{l}A_2^{-1}. \tag{15}$$

Розглянемо ланцюговий дріб із дійсними елементами. Легко бачити, що

$$\begin{aligned} \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n} + \ldots &= \frac{\frac{a_1}{b_1}\Big|}{|1} + \frac{\frac{a_2}{b_1}\Big|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n} + \ldots \\ &= \frac{\frac{a_1}{b_1}\Big|}{|1} + \frac{\frac{a_2}{b_1b_2}\Big|}{|1} + \frac{\frac{a_3}{b_2b_3}\Big|}{|1} + \ldots + \frac{\frac{a_n}{b_{n-1}b_n}\Big|}{|1} + \ldots \end{aligned} \tag{16}$$

Припустимо, що матриця $(P+E)$ є невиродженою і до (15) застосуємо, схожі до (16) перетворення

$$\begin{aligned} X &= \left(E - \tfrac{P+Q|}{|P+E} - \tfrac{P+Q|}{|P+E} - \tfrac{P+Q|}{|P+E} - \ldots - \tfrac{P+Q|}{|P+E} - \ldots\right)\tfrac{k}{l}A_2^{-1} = \\ &= \Big(E - \tfrac{(P+E)^{-1}(P+Q)\big|}{|E} - \tfrac{(P+E)^{-1}(P+Q)\big|}{|P+E} - \\ &\quad - \tfrac{P+Q|}{|P+E} - \ldots - \tfrac{P+Q|}{|P+E} - \ldots\Big)\tfrac{k}{l}A_2^{-1} = \\ &= \Big(E - \tfrac{(P+E)^{-1}(P+Q)\big|}{|E} - \tfrac{(P+E)^{-2}(P+Q)\big|}{|E} - \tfrac{(P+E)^{-2}(P+Q)\big|}{|E} - \ldots - \\ &\quad - \tfrac{(P+E)^{-2}(P+Q)\big|}{|E} - \ldots\Big)\tfrac{k}{l}A_2^{-1}. \end{aligned} \tag{17}$$

В [7] узагальнено достатню умову збіжності Ворпіцького. Її можна застосувати для аналізу збіжності матричних ланцюгових дробів у формі (17).

Теорема 1. *Матричний гіллястий ланцюговий дріб*

$$\sum_{k_1=1}^{n} \frac{A_{k_1}|}{|E} + \sum_{k_2=1}^{n} \frac{A_{k_1k_2}|}{|E} + \ldots + \sum_{k_1=1}^{n} \frac{A_{k_1k_2\ldots k_l}|}{|E} + \ldots$$

є абсолютно збіжним, якщо задовольняється умова

$$\|A_{k_1k_2\ldots k_i}\| \le \frac{1}{4n}\,(i = 1,2,3,\ldots; k_i = 1,2,\ldots,n)\,.$$

Застосуємо Теорему 1 до ланцюгового дробу (17). Легко бачити, що гіллястий ланцюговий дріб (17) буде збігатися, якщо виконується умова

$$\left\|(P+E)^{-2}(P+Q)\frac{k}{l}A_2^{-1}\right\| \le \frac{1}{4}. \tag{18}$$

Підставляючи значення P і Q в формули (18), отримаємо достатню умову збіжності матричного ланцюгового дробу (17)

$$\left\|\left(A_1A_2^{-1} + \frac{k}{l}A_2^{-1} + E\right)^{-2}\left(A_1A_2^{-1} + \frac{k}{l}A_2^{-1} + \frac{l}{k}A_0\right)\frac{k}{l}A_2^{-1}\right\| \le \frac{1}{4}$$

або

$$\left\|\left(A_1A_2^{-1} + \frac{k}{l}A_2^{-1} + E\right)^{-2}\left(\frac{k}{l}A_1A_2^{-2} + \frac{k^2}{l^2}A_2^{-2} + A_0A_2^{-1}\right)\right\| \le \frac{1}{4}.$$

Тобто, у випадку однобічного матричного рівняння (1)

$$X^nA_n + X^{n-1}A_{n-1} + X^{n-2}A_{n-2} + \ldots + X^2A_2 + XA_1 + A_0 = 0,$$

якщо існують

$$Y_0 = \left(X^{-1}\right)^1, Y_1 = \left(X^{-1}\right)^2, \ldots, Y_{n-3} = \left(X^{-1}\right)^{n-2},$$

то достатньою умовою збіжності ітераційного процесу (10) буде

$$\left\|\left(\tilde{A}_1\tilde{A}_2^{-1} + \frac{k}{l}\tilde{A}_2^{-1} + E\right)^{-2}\left(\frac{k}{l}\tilde{A}_1\tilde{A}_2^{-2} + \frac{k^2}{l^2}\tilde{A}_2^{-2} + \tilde{A}_0\tilde{A}_2^{-1}\right)\right\| \le \frac{1}{4}.$$

Тут

$$\tilde{A}_0 = A_{n-2} + Y_0A_{n-3} + \ldots + Y_{n-5}A_2 + Y_{n-4}A_1 + Y_{n-3}A_0, \text{ а } \tilde{A}_2 = A_n,\ \tilde{A}_1 = A_{n-1}.$$

4. Чисельні експерименти

Для практичної перевірки ефективності застосування рекурентної формули (13) було проведено обчислювальні експерименти в середовищі FreeMat.

Приклад 1. Розглянемо поліноміальне матричне рівняння

$$X^2A_2 + XA_1 + A_0 = 0, \tag{19}$$

де

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \ A_0 = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 17 & 9 \end{pmatrix}.$$

Одним із точних розв'язків рівняння (19) є

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай $l = 1, k = 1$, а початкове значення

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді, використовуючи формулу (13), обчислюємо результати наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Результати наближеного обчислення матричного рівняння (19)

ε	Кількість ітерацій, n	Наближений розв'язок, $X^{(n)}$	Похибка
0.1	22	$X^{(n)} = \begin{pmatrix} -1.0039 & 1.9978 \\ -2.9943 & 0.9964 \end{pmatrix}$	0.0929
0.01	30	$X^{(n)} = \begin{pmatrix} -1.0001 & 2.0002 \\ -3.0007 & 1.0001 \end{pmatrix}$	0.0071
0.001	37	$X^{(n)} = \begin{pmatrix} -1.0000 & 2.0000 \\ -3.0001 & 1.0000 \end{pmatrix}$	0.0007
0.0001	44	$X^{(n)} = \begin{pmatrix} -1.0000 & 2.0000 \\ -3.0001 & 1.0000 \end{pmatrix}$	0.0001

Ці результати підтверджують збіжність ітераційного процесу (13) до розв'язку рівняння (19)

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

із похибкою ε.

Приклад 2. Розглянемо поліноміальне матричне рівняння

$$X^2 A_2 + X A_1 + A_0 = 0, \tag{20}$$

де

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_0 = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Одним із точних розв'язків рівняння (20) є

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нехай $l = 1, k = 1$, а початкове значення

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді, використовуючи формулу (21), обчислюємо результати наведені у табл. 2.

Таблиця 2

Результати наближеного обчислення матричного рівняння (20)

ε	Кількість ітерацій, n	Наближений розв'язок, $X^{(n)}$	Похибка
0.1	11	$X^{(n)} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & -0.5000 \\ 0.0338 & -0.9452 & -2.8880 \\ 0 & 0 & 2.0000 \end{pmatrix}$	0.0915
0.01	23	$X^{(n)} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & -0.5000 \\ 0.0043 & -0.9932 & -2.9863 \\ 0 & 0 & 2.0000 \end{pmatrix}$	0.0088
0.001	37	$X^{(n)} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & -0.5000 \\ 0.0004 & -0.9993 & -2.9986 \\ 0 & 0 & 2.0000 \end{pmatrix}$	0.0009
0.0001	51	$X^{(n)} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & -0.5000 \\ 0.0000 & -0.9999 & -2.9998 \\ 0 & 0 & 2.0000 \end{pmatrix}$	0.0001

Ці результати підтверджують збіжність ітераційного процесу (13) до розв'язку рівняння (20)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

із похибкою ε.

Приклад 3. Розглянемо поліноміальне матричне рівняння

$$X^4 A_4 + X^3 A_3 + X^2 A_2 + X A_1 + A_0 = 0, \tag{21}$$

де

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Нехай $l = 0.1, k = 1$, а початкове значення

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді, використовуючи формули (9)–(10), обчислюємо результати наведені у табл. 3.

Таблиця 3

Результати наближеного обчислення матричного рівняння (21)

ε	Кількість ітерацій, n	Наближений розв'язок, $X^{(n)}$	Похибка
0.1	8	$X^{(n)} = \begin{pmatrix} 1.0095 & 0.0377 \\ 0 & 1.0016 \end{pmatrix}$	0.0916
0.01	11	$X^{(n)} = \begin{pmatrix} 1.0096 & 0.0376 \\ 0.0000 & 0.9999 \end{pmatrix}$	0.0069
0.001	14	$X^{(n)} = \begin{pmatrix} 1.0096 & 0.0375 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$	0.0006
0.0001	17	$X^{(n)} = \begin{pmatrix} 1.0096 & 0.0375 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$	0.0001

5. Висновки

Розглянуто однобічні матричні рівняння над кільцем некомутуючих матриць. Запропоновано обчислювальну схему розв'язування цих рівнянь та отримано рекурентні співвідношення для знаходження їх наближених розв'язків. Досліджено збіжність ланцюгових дробів, які використовують в обчислювальній схемі. Проведено чисельні експерименти, що підтверджують застосовність і ефективність запропонованого підходу.

Список використаної літератури

1. Beavers A.N. A New Solution Method for the Lyapunov Matrix Equation / A.N. Beavers, E.D. Denman // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1975. – Vol. 29, № 3. – P. 416–421.
2. Boichuk A.A. Criterion of solvability of matrix equations of Lyapunov type / A.A. Boichuk, S.A. Krivosheya // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – Vol. 50, № 8. – P. 1162–1169.
3. Khovanskii A.N. The Application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory / A.N. Khovanskii. – P. Noordhoff, 1963. – 212 p.
4. Kramer K. Solving Algebraic Riccati Equations via Proper Orthogonal Decomposition / K. Kramer // IFAC Proceedings Volumes. – 2014. – Vol. 47, Issue 3. – P. 7767–7772.
5. Lions J.-L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations / J.-L. Lions. – Berlin: Springer-Verlag, 1971. – 414 p.
6. Nedashkovska A.M. Generalization of the Khovanskii's method for solving matrix polynomial equations / A.M. Nedashkovska // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – № 2. – С. 42–49.
7. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби / Д.И. Боднар. – Київ: Наукова думка, 1986. – 176 с.
8. Джоунс У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения / У. Джоунс, В. Трон. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.

Стаття: надійшла до редколегії 01.09.2022
доопрацьована 21.09.2022
прийнята до друку 05.10.2022

GENERALIZATION OF THE HOVANSKY METHOD FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF UNILATERAL POLYNOMIAL MATRIX EQUATIONS

A. Nedashkovska

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, Ukraine
e-mail: anastasiya.nedashkovska@lnu.edu.ua

Matrix equations and systems of matrix equations are widely used in some applied disciplines, in particular, in optimization problems of control systems. However, there is no universal approach to solving all problems of this class: only methods of solving the most popular matrix equations, such as the Sylvester, Riccati, and Lyapunov equations, have been developed. In one of the previous publications, Khovansky's method for constructing an iterative scheme for solving polynomial matrix equations was considered and generalized. In this paper, the previously considered approach is generalized, and an approximate solution scheme of one-sided matrix equations of the form $X^nA_n + X^{n-1}A_{n-1} + \,!\ldots + X^2A_2 + XA_1 + A_0 = 0$ is presented. The recurrent formula for calculating the approximate solution of equations in the form of a continued matrix fraction is also given. The convergence of the proposed method is investigated using the generalized Vorpitsky sufficient condition of convergence. The proposed scheme was tried and tested for approximate solving of one-sided matrix equations of the second and fourth degrees. The given results of numerical experiments confirm the theoretical calculations and the effectiveness of the scheme for the approximate solution of matrix equations.

Key words: iterative method, matrix equations, unilateral polynomial matrix equations, Khovansky's method.