СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

УДК 517.26:517.928.1:519.615.3

ІНТЕРВАЛЬНІ МЕТОДИ З ЛОКАЛІЗАЦІЄЮ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

П. Сеньо, А. Мельничин

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університеська, 1, Львів, 79000,
e-mail: *petrosny@ukr.net*, *andriy.melnychyn@lnu.edu.ua*

На підставі аналізу прямих методів розв'язування варіаційних задач доведено актуальність розробки методів побудови двосторонніх апроксимацій, які гарантовано містять розв'язки таких задач. В ній розв'язування варіаційної задачі методами інтервального аналізу з використанням квадратурних формул засноване на зведенні такої задачі до задачі мінімізації відповідної інтервальнозначної функції багатьох змінних шляхом побудови достатньо вузьких інтервальних розширень [2] шуканої функції та її похідних між суміжними вузлами квадратури та її залишкового члена. Для цього використано методи сплайн – функцій [6].

Двосторонню апроксимацію [9] розв'язку варіаційної задачі отримано шляхом розв'язування її інтервального аналога. Для побудови цього інтервального аналога використано відповідні інтервальні ермітові сплайни третього степеня та інтервальне розширення залишкового члена квадратурної формули. Доцільність такого підходу має узгоджуватися з точністю квадратурної формули, яку застосовуємо для виділення головної частини функціонала варіаційної задачі, тому що в протилежному випадку це приводить до суттєвого зростання обсягу обчислень. Інтервальний аналог такої варіаційної задачі розв'язуємо методами мінімізації відповідної інтервальнозначної функції багатьох змінних.

Запропонований алгоритм модифіковано згідно з висновком теореми з [12] про динаміку проміжних точок залишкового члена формули Тейлора при стисненні у точку інтервалу розкладу функції.

Побудовано інтервальні методи локалізації функціональних невизначеностей для розв'язування варіаційних задач із умовами, які потребують синхронного розв'язування оптимізаційних задач. Розв'язано контактну задачу термопружності з врахуванням теплоутворення у тепловому контакті тіл. Знайдено закон розподілу стискальної сили, за якого спрацювання буде мінімальним, температура на межі півпросторів не перевищить заданих критичних значень, процес гальмування відбудеться за найменший час.

Ключові слова: інтервал, інтервальне розширення функції, прямі методи, двостороння апроксимація, сплайн, інтервальний сплайн.

1. Вступ

Одним з основних методів розв'язування складних математичних задач вигляду

$$F(x) \prec f, \tag{1}$$

де оператор $F: \ (D \subset R^n) \to (G \subset R^m), \ \ (\prec \in \{ =, \neq, <, >, \leq, \geq, \equiv, \approx, \to, \cdots \}$ тощо), полягає у виділенні такої його основної адитивної частини $\overline{F}$, що методи розв'язання близької, в певному сенсі відстані, задачі

$$\overline{F}(x) \prec f, \tag{2}$$

де $F(x) \equiv \overline{F}(x) + r(x)$, відомі. Зокрема, так отримуємо різницеві методи, методи скінченних і граничних елементів, прямі методи розв'язування варіаційних задач і задач оптимального управління. Але розв'язки задачі (2) є лише наближеннями до відповідних розв'язків задачі (1). Тому задача побудови двосторонніх апроксимацій розв'язків задачі (2), які гарантовано містять відповідні розв'язки задачі (1), актуальна. Сучасні методи розв'язання цієї проблеми головно засновані на інтервальній математиці [1]. Вони мають широкий спектр застосувань і в багатьох випадках дають вичерпні рекомендації щодо вибору стратегії і методів наближених обчислень. Близькими до них є двосторонні обчислювальні методи, які також належать до прямих методів оцінки точності похибки обчислень. Ефективними методами розв'язання цієї проблеми є методи математики функціональних інтервалів [7].

Побудову таких двосторонніх апроксимацій розв'язків задачі (1) ми виконали за допомогою методів побудови їх інтервальних розширень та інтервальних розширень їхніх похідних. Для цього використані методи сплайн–функцій [4].

2. Формулювання задачі

Нехай, наприклад, потрібно розв'язати варіаційну задачу Лагранжа знаходження мінімуму функціонала $J(y) = \int\limits_a^b f\,(x,\ y,\ \ y')\ dx$ за граничних умов $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$. До цієї найпростішої задачі варіаційного числення

$$\int\limits_a^b f\,(x,\ y,\ \ y')\ dx \to \min \tag{3}$$

при

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \tag{4}$$

зводиться велика кількість досить складних задач. Зокрема, до неї зводиться крайова задача знаходження розв'язку лінійного диференціального рівняння

$$\frac{d}{dx}\,(p(x)\,y') + q(x)\,y = f(x) \tag{5}$$

при крайових умовах (4), де $p(x),\ \ q(x),\ \ f(x)\ \in\ C[a,\ \ b]$, причому $p(x)\ >\ 0$ коли $a \le x \le b$; задача Штурма–Ліувілля знаходження нетривіального розв'язку диференціального рівняння

$$(p(x)\,y')' + (q(x) + \lambda\,\rho(x))\,y = 0 \tag{6}$$

при однорідних крайових умовах

$$\alpha_0\,y(a) + \alpha_1\,y'(a) = 0, \beta_0\,y(b) + \beta_1\,y'(b) = 0, \tag{7}$$

де $p(x) > 0$, $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$, $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ – неперервні функції а λ – параметр. Для задачі (5) – (4) функціонал

$$J(y) = \int\limits_a^b f\,(x,\ y,\ \ y')\ dx = \int\limits_a^b \left(p(x)\,(y')^2 - q(x)\,y^2 + 2\,f(x)\,y\right)\,dx,$$

а для задачі (6) – (7)

$$J(y) = \int_a^b f\left(x,\ y,\ \ y'\right)\,dx = \int_a^b \left(p(x)\,(y')^2 - (q(x) + \lambda\,\rho(x))\,y^2\right)\,dx.$$

Крім того, задача Штурма–Ліувілля часто виникає у випадку розв'язування рівнянь математичної фізики. Далі буде з'ясовано, що інтервальні методи локалізації функціональних невизначеностей у випадку розв'язування варіаційних задач принципово не відрізняються для різних класів таких задач.

Розв'язування задач варіаційного числення часто зводиться до розв'язування диференціальних рівнянь Ейлера – Лагранжа. Однак розв'язування крайових задач, які виникають, породжує низку складних проблем: явний розв'язок у квадратурах вдається отримати рідко, застосування чисельних методів породжує похибки апроксимацій, похибки методу, виникають проблеми стійкості тощо. Особливо рельєфно ці проблеми проявляють у випадку розв'язування рівняння Ейлера для варіаційних задач з багатьма змінними. Тому для чисельного розв'язування варіаційних задач застосовують прямі методи, більшість з яких полягає в переході до еквівалентних задач на екстремум функції багатьох змінних. Таким є метод Ейлера, метод Рітца, метод градієнтного спуску тощо. Всі ці методи побудовані за методикою, яка описана у вступі. Зокрема, у методі Ейлера оператором $F(x)$ є функціонал

$$J(y) = \int_a^b f\left(x,\ y,\ \ y'\right)\,dx,$$

оператором $\overline{F}$ квадратурна формула інтеграла функціонала $J(y)$, а $r(x)$ – залишковий член цієї квадратурної формули; у методі Рітца оператором $F(x)$ є функціонал $J(y)$, оператором $\overline{F}$ результат обчислення інтеграла $\int\limits_a^b f\left(x,\ y,\ \ y'\right)\,dx$ у припущенні, що розв'язок задачі (1) є $y = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\,\varphi_i(x)$, де a_i – константи, $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ – повна система функцій в області D визначення функціонала $J(y)$, та виконуються умови (2), а $r(x)$ – похибка апроксимації у такому припущенні. Очевидно, що в таких методах додатково ще виникають похибки апроксимації похідних невідомого розв'язку задачі (1)–(2), наприклад, за допомогою відповідних поділених різниць, та похибки апроксимації похідних розв'язку цієї задачі у відповідних проміжних точках її залишкового члена. Оцінка похибки методу Рітца – досить важка задача [7]. Зауважимо лише, що точність розв'язку, отриманого за допомогою цього методу, суттєво залежить від вдалого вибору координатних функцій $\varphi_i(x)$ і загалом зростає зі збільшенням їхньої кількості.

Але навіть без врахування таких похибок для знаходження розв'язку з задовільною точністю цієї варіаційної задачі потрібно розв'язувати задачу на екстремум функції багатьох змінних, яка зводиться до розв'язування системи нелінійних алгебричних рівнянь великої розмірності, що породжує проблему вибору "хорошого" початкового наближення тощо.

Отже, все це потребує розробки таких методів побудови двосторонніх апроксимацій, які гарантовано містять розв'язки заданої варіаційної задачі. Основи побудови таких методів запропоновано в [9].

3. Загальна схема розв'язання задачі

3.1. Локалізації функціональних невизначеностей для розв'язування варіаційних задач

Основи побудови таких методів закладені в [9, 11, 12]. Для розв'язування варіаційних задач локалізація функціональних невизначеностей [10] полягає в реалізації методів двох наступних підпунктів.

3.2. Побудова інтервальних розширень розв'язку задачі та його похідних

Розв'язування варіаційної задачі методами інтервального аналізу з використанням квадратурних формул ґрунтується на зведенні такої задачі до задачі мінімізації відповідної інтервальнозначної функції багатьох змінних шляхом побудови достатньо вузьких інтервальних розширень шуканої функції $y(x)$ та її похідних між суміжними вузлами квадратури та залишкового члена $R_n\left(r_\xi\right)$ цієї квадратури. Інтервальне оцінювання залишкового члена $R_n\left(r_\xi\right)$ квадратури потребує побудови інтервальних розширень відповідних похідних підінтегральної функції $f(x,\ y(x),\ y'(x))$. Далі так отриману задачу розв'язуємо відповідними методами інтервального аналізу.

Будемо вважати, що значення y_i $(i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ функції $y(x)$ у вузлах сітки $\Omega = \{x_i|\ x_0 = a < x_1 < x_2 < \ \cdots\ < x_n = b\}$ нам вже відомі; функція $y(x)$, наприклад, тричі неперервно диференційовна на проміжку $[a,\ b]$. Побудуємо на інтервалі $[a,\ b]$ ермітовий кубічний сплайн $s(x)$, значення якого і його першої похідної у вузлах сітки збігаються зі значеннями функції $y(x)$ та її першої похідної, тобто $s(x_i) = y(x_i)$, $s'(x_i) = y'(x_i)$, $i = 0,\ 1,\ ...,\ n$. Оскільки у вузлах сітки $s(x_i) = y(x_i)$, то згідно з теоремою Ролля на кожному інтервалі $X_i = [x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1,\ \cdots,\ n)$ існує така точка ξ_i, що $s'(\xi_i) = y'(\xi_i)$. Аналогічно (див. теорему 3.8.1 з [2]), на кожному інтервалі $x_{i-2} < x < x_i$ $(i = 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ існує така точка η_i, що $s''(\eta_i) = y''(\eta_i)$. Для достатньо гладких функцій $y(x)$ та їх ермітових кубічних сплайнів виконуються такі співвідношення [6]:

$$\left\|s^{(r)}(z) - y^{(r)}(z)\right\|_\infty = o\left(h^{4-r}\right),\ (r = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
s(z) = z\ (1-z)^2 h_i\ m_i + z^2 (z-1)\ h\ m_{i+1} + (1-z)^2 (2\ z+1)\ h\ x_i + z^2 (3 - 2\ z)\ h\ y_{i+1},\\
s'(z) = 6\, z\, (1-z)\, (y_{i+1} - y_i)/h_i + (1 - 4\, z + 3\, z^2)\, m_i - (2\, z - 3\, z^2)\, m_{i+1},\\
s''(z) = (6\, (1 - 2\, z)\, (y_{i+1} - y_i)/h_i - (4 - 6\, z)\, m_i - (2 - 6\, z)\, m_{i+1})/h_i,\\
s'''(z) = 6\, (m_{i+1} + m_i - 2\, (y_{i+1} - y_i)/h_i)/h_i^2,
\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}
s(z) = \frac{1}{6}(1-z)^3 h^2 M_i + \frac{1}{6} z^3 h^2 M_{i+1} + (y_i - \frac{1}{6} h^2 M_i)\ (1-z) + (y_{i+1} - \frac{1}{6} h^2 M_{i+1})\ z,\\
s'(z) = (y_{i+1} - y_i)/h_i - h_i\, ((2 - 6\, z + 3\, z^2)\, M_i + (1 - 3\, z^2)\, M_{i+1})/6,\\
s''(z) = M_i\, (1-z) + M_{i+1}\, z,\\
s'''(z) = (M_{i+1} - M_i)/h_i,
\end{gathered}$$

де $h = \max\ h_i$, $z = (x - x_i)/h_i$, $y_i = y(x_i)$, $m_i = s'(x_i)$, $M_i = s''(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n - 1$.

У вузлах сітки Ω друга похідна так побудованого сплайна, взагалі кажучи, розривна, тобто цей сплайн є кубічним сплайном дефекту 2. Конкретні значення оцінок (8) інтерполяції функції $y(x)$ у вузлах сітки Ω ермітовими кубічними сплайнами залежно від гладкості цієї функції наведені у табл. (див. [6], табл. 2.5).

Таблиця 1

Значення оцінок інтерполяції функції $y(x)$ у вузлах сітки Ω

Клас функції	R_0	R_1	R_2	R_3
$C^1[a,\ b]$	$\frac{3h}{8}\ \omega(y')$	$\frac{3}{2}\omega(y')$	–	–
$W^2_\infty[a,\ b]$	$\frac{h^2}{16}\ \|y''(x)\|_\infty$	$0.2475\ h\ \|y''(x)\|_\infty$	–	–
$C^1C^2_\Omega[a,\ b]$	$\frac{h^2}{32}\ \omega(y'')$	$0.12375\ h\ \omega(y'')$	$\frac{4}{3}\omega(y')$	–
$C^1W^3_{\Omega,\infty}[a,\ b]$	$\frac{h^3}{96}\ \|y'''(x)\|_\infty$	$0.032302\ h^2\ \|y'''(x)\|_\infty$	$\frac{8h}{27}\ \|y'''(x)\|_\infty$	–
$C^1C^3_\Omega[a,\ b]$	$\frac{h^3}{192}\ \omega(y''')$	$0.016151\ h^2\omega(y''')$	$\frac{4h}{27}\ \omega(y''')$	$\omega(y''')$
$C^1W^4_{\Omega,\infty}[a,\ b]$	$\frac{h^4}{384}\ \|y''''(x)\|_\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{216}h^3\ \|y''''(x)\|_\infty$	$\frac{h^2}{12}\ \|y''''(x)\|_\infty$	$\frac{1}{2}h\ \|y''''(x)\|_\infty$

У цій таблиці $\omega_i(y) = \max\limits_{\bar{x},\ \bar{\bar{x}} \in \Omega_i} |y(\bar{x}) - y(\bar{\bar{x}})|$ – коливання функції $y(x)$ в області Ω_i, $\omega(y) = \max\limits_i \omega_i(y)$, а R_r – величини $o\left(h^{4-r}\right)$, $(r = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ формули (8). Очевидно, $\omega(y^{(r)}) \subseteq \omega(y^{(r)}([a,\ b]))$, де $\omega(y^{(r)}([a,\ b]))$ – інтервальне розширення похідної $y^{(r)}(x)$ на інтервалі $[a,\ b]$.

Однак трапляються випадки, коли відомі лише значення функції у вузлах сітки Ω. Тоді невідомі значення похідних у вузлах сітки замінюємо відповідними поділеними різницями $\tilde{y}^{(k)}(x)$, які апроксимують ці значення з високою точністю. Вважаючи їх значеннями похідних у вузлах сітки, будуємо такий сплайн $s_\Delta(x)$, що $s_\Delta(x_i) = y(x_i)$, $s'_\Delta(x_i) = \tilde{y}'(x_i)$, $i = 0,\ 1,\ ...,\ n$. Доведено [6], що ермітові кубічні сплайни $s(x)$, $s_\Delta(x)$ і їхні перші дві похідні на інтервалі $X_i = [x_i,\ x_{t+1}]$ оцінюються так:

$$|s_\Delta(x) - s(x)| \leq z\ (1 - z)\ h \max_{j=i,i+1} |y'(x_j) - \tilde{y}'(x_j)|,$$

$$|s'_\Delta(x) - s'(x)| \leq ((1 - z)\ |1 - 3\ z| + z\ |2 - 3\ z|) \max_{j=i,i+1} |y'(x_j) - \tilde{y}'(x_j)|,$$

$$|s''_\Delta(x) - s''(x)| \leq |6\ z - 4|\ |y'(x_i) - \tilde{y}'(x_i)|/h_i + |2 - 6\ z|\ |y'(x_{i+1}) - \tilde{y}'(x_{i+1})|/h_i.$$

За припущенням, функція $y(x)$ тричі неперервно диференційовна, тому для неї і її похідних на кожному проміжку X_i виконуються інтервальні умови Ліпшиця $\omega(y^{(j)}(X_i)) \leq L_i^{(j)}\omega(X_i)$, $(j = 0, 1, 2, 3)$, де $L_i^{(j)}$ – константи Ліпшиця. Отже, виконуються умови теореми 3.6 з [2]. Тому

$$W(y^{(j)}(x),\ X_i) \subseteq y^{(j)}(x_i) + y^{(j+1)}(X_i)\,(X_i - x_i),\ (j = 0, 1, 2, 3),$$

де $W(y^{(j)}(x),\ X_i)$ – область значень функції $y^{(j)}(x)$ на проміжку X_i. Сплайн $s(x)$ на кожному проміжку X_i. неперервно диференційвний, тому для нього і його похідної на кожному проміжку X_i також виконуються інтервальні умови Ліпшиця

$$\omega(s^{(j)}(X_i)) \leq \tilde{L}_i^{(j)}\omega(X_i),\ (j = 0, 1).$$

Отже,

$$W(s^{(j)}(x),\ X_i) \subseteq s^{(j)}(x_i) + s^{(j+1)}(X_i)\,(X_i - x_i),\ (j = 0, 1).$$

Оскільки $s(x_i) = y(x_i)$, $s'(x_i) = y'(x_i)$, $i = 0,\ 1,\ ...,\ n$, то, враховуючи ці включення та (8), інтервальні розширення похідних $y^{(j)}(X_i)$ на проміжках X_i апроксимуємо інтервальними розширеннями відповідних похідних сплайна $s(x)$ на тих самих проміжках. Для підвищення точності інтервальне розширення другої похідної функції $y(x)$ на проміжку $X_i = [x_{i-1}, x_i]$ можна замінити інтервальним розширенням другої похідної побудованого сплайна на проміжку $[x_{i-2},\ x_i]$; третьої похідної цієї функції на проміжку $X_i = [x_{i-1}, x_i]$ – інтервальним розширенням третьої похідної сплайна на проміжку $[x_{i-3},\ x_i]$. Доцільність такого підходу має узгоджуватися з точністю квадратурної формули, яку застосовуємо для виділення головної частини функціонала $J(x)$, тому що в протилежному випадку це приводить до суттєвого зростання обсягу обчислень. Однак на проміжку $[x_0,\ x_1]$ для другої похідної, та на проміжку $[x_1,\ x_2]$ для третьої похідної все ж треба застосовувати попередню методику. Зауважимо, що сплайн $s(x)$ можна ефективно побудувати, вважаючи невідомими значення $s''(x)$ у вузлах сітки [8].

Оскільки задачу мінімізації так отриманої інтервальнозначної функції розв'язуємо інтервальними методами і тому нам відомі лише інтервали X_i такі, що $x_i \in X_i$, $(i = 1,\ \cdots,\ n)$, то на підставі знайденого сплайна $s(x)$ будуємо відповідний інтервальний сплайн $\bar{s}(x)$ [5]. Якщо відома оцінка норми $\|y(x)\|_{p,\infty}$, то далі будуємо таку інтервальну функцію $\bar{r}_j(x)$, що $y^{(j)}(x) \in \bar{s}^{(j)}(x) + \bar{r}_j(x)$. Для цього використовуємо висновок теореми 1.

Теорема 1 [4]. *Нехай $y \in W^p_\infty[a,b]$, $1 \le p \le n+1$, і сплайн $s \in S^k_n$ інтерполює функцію y і її похідні до $k-1$ порядку, включно. Тоді*

$$\left\|\partial^j(y(x) - s(x))\right\|_\infty \le K_j h^{p-j} \left\|y(x)\right\|_{p,\infty},$$

де K_j – константи, які не залежать від $y(x)$ і h.

На підставі цієї теореми та теореми вкладення з W^p_2 у L_∞ доведено [5], що

$$\bar{r}_j(x) = [-1,\ 1]\ \min\{K_j h^{p-j} \left\|y(x)\right\|_{p,\infty},\ K_k h^{p-k} \left\|y(x)\right\|_{p,2} (x - x_i)^{k-j}/(k-j)!\}$$

для всякого $x \in [x_i,\ x_{i+1}]$, $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$. Отже, так побудовано смуги, які містять значення j-ї похідної функції $y(x)$.

Якщо залишковий член квадратурної формули містить похідні функції $y(x)$ вищих порядків у певних проміжних точках, то аналогічно будуємо і застосовуємо сплайни вищих степенів.

3.3. Зведення варіаційної задачі до задачі мінімізації інтервальнозначної функції

Для розв'язування варіаційної задачі (3)–(4) запропонованими вище методами інтервального аналізу потрібно будувати сплайн, степінь якого визначається порядком старшої похідної функції $y(x)$, що входить у залишковий член відповідної квадратурної формули. З огляду на це доцільно використовувати квадратурні формули прямокутників, або трапецій, що потребує побудови кубічних сплайнів. Це суттєво спрощує вигляд функції, яку потрібно мінімізувати, та зменшує обсяг обчислень.

Нехай $F(x)$ є позначенням підінтегральної функції функціонала

$$J(y(x)) = \int_a^b f\,(x,\ y,\ \ y')\ dx$$

як функції аргументу x. Тоді, використавши деяку квадратурну формулу, послідовно отримаємо

$$J(y) = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b f(x,\ y(x),\ y'(x))\,dx\ = \sum_{i=0}^{n} c_i\, F(x_i) + R_n, \qquad (10)$$

де x_i – точки розбиття проміжку інтегрування; c_i – константи цієї квадратурної формули; $R_n = \bar{c}_n\, F^{(k)}(\xi)$, де константа $\bar{c}_n$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{c}_n = 0$; $\xi = a + \theta(b-a)$, де $\theta \in (a,\ b)$. Якщо $\bar{R}_n$ інтервальне оцінювання на інтервалі $[a,\ b]$ залишкового члена R_n, то

$$\int_a^b F(x)dx \subset\ \sum_{i=0}^{n} c_i\, F(x_i) + \bar{R}_n.$$

Нехай формула (10) є квадратурною формулою трапецій, тобто, $c_0 =\ \ c_n = 1$, $c_1 =\ c_2 =\ \cdots\ =\ c_{n-1} = 2$, $h_1 = h_2 = \cdots h_n = h$, $x_i = a + i\ h$, $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n$; $R_n\ =\ -h^3 \left(\sum\limits_{i=1}^{n} F''(\xi_i)\right)/12\ = (b\,-\,a)^3 F''(\eta)/(12\ \ n^2)$, $\xi_i\ \in\ (x_{i-1},\ \ x_i)$, $\eta\ \in\ [a,b]$. Враховуючи визначення функції $F(x)$, отримаємо:

$$F''(x) = \frac{d}{dx} {f_x}' + \frac{d}{dx}(f'_y y') + \frac{d}{dx}(f'_{y'} y'') =$$

$$= f''_{xx} + (f''_{yx} + f''_{yy} y')y' + 2\ f''_{yy'} y' y'' + f'_y y'' + (f''_{xy'} + f''_{y'y'} y'')\ y'' + f'_{y'} y'' =$$

$$= f''_{xx} + (f''_{yx} + f''_{yy} y')y' + (2\ f''_{yy'} y' + f'_y + f''_{xy'} + f''_{y'y'} y'' + f'_{y'})\ y'', \qquad (11)$$

де

$$f'_{z_i} = \frac{\partial}{\partial z_i} f(z_1,\ z_2,\ z_3),\ f''_{z_i z_j}\ = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\ f(z_1,\ z_2,\ z_3),\ (i,\ j = 1,\ 2,\ 3).$$

Обчислимо інтервальні розширення похідних $y_i^{(j)}(x)$, $(j = 1,\ 2,\ 3)$ на кожному інтервалі X_i згідно з методикою, яка описана в підпункті 3.2. Інтервальне оцінювання залишкового члена R_n виконується за формулою $R_n\ =\ -h^3 \left(\sum\limits_{i=1}^{n} F''(\xi_i)\right)/12$, тому що інтервальне оцінювання на всьому проміжку $[a,\ b]$ є об'єднанням інтервальних розширень відповідних функцій на вузьких інтервалах X_i, де відхилення їх від області значень $W(F'',\ X_i)$ функції $F''(x)$ на проміжку X_i незначне. Це дає змогу мінімізувати інтервальне розширення залишкового члена R_n. Підставимо у (10) замість ξ_i, $y(\xi_i)$, $y'(\xi_i)$, $y''(\xi_i)$, відповідно, інтервали X_i, S_i, S'_i, S''_i, де S_i, S'_i, S''_i – інтервальні оцінювання на інтервалах X_i сплайнів $s(x)$, $s'(x)$, $s''(x)$, і всі дії замінимо на відповідні дії над інтервалами. У підсумку отримаємо такий інтервал $\bar{R}_n$, що $R_n \subseteq \bar{R}_n$. Отже, врахувавши висновки, отримані в підпункті 3.2, маємо таку теорему.

Теорема 2. *Якщо розв'язок $y(x)$ задачі* (3)–(4) *тричі неперервно диференційовний на проміжку $[a,\ b]$, то $y(x_i) \subseteq Y_i$, де Y_i $(i = 0,\ 1, \ldots,\ n)$ – інтервальний розв'язок на у точці x_iзадачі*

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\, f(x_i,\ Y_i,\ S_i') + \bar{R}_i \ \rightarrow\ \min. \tag{12}$$

Тут S_i' – інтервальні розширення у вузлах квадратурної формули похідної сплайна, побудованого за формулами (9); $\bar{R}_n$ – інтервальне оцінювання залишкового члена R_n, отримане з використанням інтервальних розширень сплайнів $s(x),\ s'(x),\ s''(x)$ за методикою, описаною вище.

Задачу (12) розв'язуємо відповідними інтервальними методами мінімізації.

Зауваження 1. Висновки теореми 3 дають змогу модифікувати запропонований алгоритм.

Теорема 3 [12]. *Нехай відображення $F : D \subset R^n \to R^m$ $(k+1)$– раз неперервно диференційовне за Фреше в околі $D_0 \subset D$ деякої точки x; всі частинні похідні $(k+1)$-го порядку всіх його компонент f_i, $(i = \overline{1,\ n})$ не дорівнюють тотожно нулю і не виконується хоча б одна з рівностей $f_i(0) = 0,\ f_i'(0) = 0,\ \cdots,\ f_i^{(k-1)}(0) = 0.$ Тоді, якщо $x + \Delta \in D_0$, то*

$$\lim_{\Delta \to 0} \theta^{(k)} = \frac{1}{k+1}, \tag{13}$$

де $x + \theta^{(k)}\ \Delta$, $(0 < \theta^{(k)} < 1)$ проміжна точка залишкового члена у формулі Тейлора розкладу цього відображення в околі точки x.

Справді, оскільки ширини інтервалів X_i малі, то у другій похідній залишкового члена $R_n = -h^3 \left(\sum_{i=1}^{n} F''(\xi_i)\right)/12$ проміжні точки ξ_i у цих інтервалах, згідно з теоремою 3, приймемо рівними $\xi_i = x_{i-1} + \frac{1}{3}(x_i - x_{i-1})$. Внаслідок цього задача (12) стає задачею мінімізації числової функції багатьох змінних при умовах (4).

Побудувавши інтервальне розширення залишкового члена R_n на інтервалах $\Xi_i = x_{i-1} + \frac{1}{3}[x_{i-1},\ x_i]$, отримуємо іншу модифікацію цього методу. Аналогічно модифікуємо метод і при застосуванні квадратурних формул вищих порядків точності.

3.4. Інтервальні методи для розв'язування варіаційних задач з умовами, які потребують узгодженого розв'язування оптимізаційних задач

Нехай потрібно знайти таку функцію $g(x)$, за якої функціонал

$$I = \int_a^b G(x,\ g,\ z)\, dx \tag{14}$$

набуває мінімального значення, де

$$z(x) = \int_a^x g(\tau)\, d\tau, \tag{15}$$

$$g(a) = g_0, z(b) = z_0, \tag{16}$$

причому для відомих функцій $\bar{t}_i(x,\ g,\ z)$, $(i = \overline{1,\ m})$ одночасно потрібно знайти таке найменше b, за якого

$$\bar{t}_i(x,\ g,\ z) \leq K_i,\ (i = \overline{1,\ m}) \tag{17}$$

для всіх $x \in [a, b]$.

Умови вигляду (15) часто трапляються в багатьох задачах науки і техніки. Формально задачу (14)–(16) можна розглядати як найпростішу задачу варіаційного числення для *двох* невідомих функцій $g(x)$, $z(x)$, які однак є залежними (співвідношення (15)); невідомі також $g(b)$ та $z(a)$. В умові (15) верхня межа інтеграла змінна, тому її не можна розглядати як додаткову умову у вигляді рівності та застосовувати відповідно метод множників Лагранжа. Наявність умови (17) ще більше ускладнює задачу.

Нехай $u(x)$ – первісна функції $g(x)$. Тоді $y'(x){=}u'(x){=}g(x)$, тому задача (14)–(16) з урахуванням заміни

$$y(x) = \int\limits_a^x g(\tau)\, d\tau \tag{18}$$

еквівалентна такій задачі варіаційного числення. Потрібно знайти функцію $y(x)$, за якої функціонал

$$I = \int\limits_a^b F(x,\ y,\ y')\, dx \tag{19}$$

набуває мінімального значення, якщо

$$y'(a) = g_0, y(b) = z_0. \tag{20}$$

Тут

$$F(x,\ y,\ y') = G(x,\ g,\ z),$$

де

$$y'(x) = g(x), y(x) = z(x).$$

Для знаходження $y(x)$ треба розв'язати диференціальне рівняння Ейлера [6]

$$F'_y - F''_{y''x} - F''_{y''y}y' - F''_{y''y'}y'' = 0. \tag{21}$$

Постійні інтегрування визначаємо з умов (20).

Далі розглядаємо I та y як функції верхньої межі b, тобто $I = I(b)$, $y(x) = y(x,\ b)$. Функція $I = I(b)$ не монотонна. Після підставлення y та y' у нерівності

$$t_i(x,\ y,\ y') \leq K_i,\ (i = \overline{1,\ m}), \tag{22}$$

де

$$t_i(x,\ y,\ y') \leq \bar{t}_i(x,\ g,\ z),\ (i = \overline{1,\ m}),$$

(тут $y(x) = z(x)$, $y'(x) = g(x)$), отримуємо нерівності

$$f_i(x,\ b) \leq K_i,\ (i = \overline{1,\ m}). \tag{23}$$

Мінімізуючи функціонал $I{=}I(b)$ по b, отримаємо нульове наближення до розв'язків нерівностей (23), які потрібно розв'язати щодо b при всіх $x \in [a, b]$. Обидві ці допоміжні задачі можна розв'язати, оцінюючи інтервальні розширення функцій $I(b)$, $f_i(x,\ b)$, як запропоновано у підрозділі 3.3. При $i > 1$ часто попередньо треба в (23) виконати усереднення. Якщо ж задачу (19)–(20) розв'язуємо прямими методами, то нерівності вигляду (23) набувають набагато простішого вигляду, але так отримуємо лише наближений розв'язок.

Наприклад, розглянемо контактну задачу термопружності з врахуванням теплоутворення при тепловому контакті тіл з праці [3].

Приклад. Два підпростори 1 та 2 стискаються розподіленою силою $q(\tau)$ і підпростір 1 ковзає зі швидкістю $\nu(\tau)$ по півпростору 2. Треба знайти закон розподілу стискальної сили, за якого спрацювання буде мінімальним, температура на межі півпросторів не перевищить заданих критичних значень, процес гальмування відбудеться за найменший час.

Нехай T – час, протягом якого рух припиниться. Треба знайти таку функцію $q(\tau)$, за якої функціонал

$$I = \int\limits_0^T \nu(\tau)\ (K_1 + K_2\, t\ (\tau,\ q(\tau),\ \nu(\tau)))\ q(\tau)\, d\tau \tag{24}$$

набуває найменшого значення, де

$$\nu(\tau) = \nu_0 - \frac{f}{m} \int\limits_0^\tau q(x)\, dx, \tag{25}$$

$$q(0) = 0, \nu(T) = 0, \tag{26}$$

$$t(\tau,\ q(\tau),\ \nu(\tau)) = c\, \nu(\tau)\, q(\tau)\, p(\tau),$$

обмеження на критичну температуру

$$t_i(\tau,\ q(\tau),\ \nu(\tau)) \le \bar{K}_i,\ (i = 1,\ 2), \tag{27}$$

$p(\tau)$ – відома функція та c, K_1, K_2, $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$, m, ν_0 – відомі константи [3].

Нехай

$$y(x) = \int\limits_0^x q(\tau)\, d\tau,$$

та $y'(x) = q(x)$. Функціонал (24) запишемо так:

$$I = \int\limits_0^T \left(\nu_0 - \frac{f}{m}\, y(x)\right)\ (K_1 + K_2\, c\, y'(x))\ \left(\nu_0\ \frac{f}{m}\, y(x)\right)\ p(x)\ y'(x)\, dx.$$

Рівняння Ейлера (21) набуває такого вигляду:

$$(a_1\, y^2 - a_2\, y + a_3)'\ y'\ p'(\tau) + 2\ (a_1\, y^2 - a_2\, y + a_3)\ (y'\ p(\tau))' = 0, \tag{28}$$

де a_1, a_2, a_3 відповідні константи. Врахувавши механічну суть задачі, рівняння (28) набуває такого вигляду:

$$\left(\ln\left(\sqrt{K_2\,c}\ \left(\frac{f}{m}\,y-\nu_0\right)\right)\right)'\ (\ln p(\tau))' + (\ln (y'\,p(\tau)))' = 0. \qquad (29)$$

Розв'язуємо це диференціальне рівняння. У цьому випадку сталі інтегрування визначаємо з умов (26). Далі розглядаємо I та y як функції верхньої межі T, тобто $I = I(T)$, $y = y(x, T)$. Функція $I = I(T)$ не монотонна. Після підставлення y та y' у нерівності $t_i(x, y, y') \le \bar{K}_i$ $(i = 1,\ 2)$ отримаємо нерівності $f_i(x, b) \le \bar{K}_i$ $(i = 1,\ 2)$. Мінімізувавши функціонал $I = I(T)$ по T, одержимо нульове наближення до розв'язків цих нерівностей, які потрібно розв'язати щодо T при всіх $x \in [0,\ T]$.

Однак рівняння Ейлера (29) часто аналітично розв'язати неможливо. В такому випадку задачу (24) – (26) розв'язуємо за методикою, яка описана в пункті 3.1, розбивши попередньо вибраний інтервал $[0,\ T]$ на інтервали T_i, $(i = \overline{0,\ n}$; $[0,\ T] = \bigcup_{i=0}^{n} T_i)$. Отже, за умов

$$y(T) = \frac{m}{f} v_0,\ y'(0) = 0$$

розв'язуємо таку задачу:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\ (v_0 - \frac{f}{m} Y_i)\ (K_1 + K_2\ c\ S_i'\ (v_0 - \frac{f}{m} Y_i)\ p_i)\ S_i' \ + \bar{R}_n \to \min, \qquad (30)$$

де $p_i = p(\tau_i)$; Y_i, S_i', $\bar{R}_n$ – інтервальні розширення розв'язку, похідної сплайна $s(t)$ у точках $\tau_i \in [0,\ T]$ та залишкового члена квадратурної формули.

Перевіряємо виконання обмежень $t_i(\tau, q(\tau), v(\tau)) \le \bar{K}_i$ $(i = 1,\ 2)$. Якщо ці умови не виконуються, то T збільшуємо і процес повторюємо до першого виконання цих обмежень.

Список використаної літератури

1. Алберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – Москва: Мир, 1972. – 316 с.
2. Алефельд S. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – Москва: Мир, 1987. – 357 p.
3. Баран В.П. Квазистатичесая контактная задача термоупругости для двух полубесконечных тел с учетом теплообразования на границе раздела / В.П. Баран, А.Г. Вардзаль, В.М. Онышкевич и др. // Соврем. пробл. Теории контакт. взаимодействий. – Ереван. – 1988. – С. 24–27.
4. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / Р. Варга. – Москва: Наука, 1974. – 126 с.
5. Добронец Б.С. Двусторонние численные методы / Б.С. Добронец, В.В. Шайдуров. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1990. – 208 с.
6. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функцый / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – Москва: Наука, 1980. – 342 с.
7. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – Гостехиздат, 1957. – 472 с.
8. Ортега Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. – Москва: Наука, 1986. – 288 с.

9. Сеньо П.С. Розв'язування варіаційних задач та задач оптимального управління методами інтервального аналізу / П.С. Сеньо // Праці міжнародної конференції з управління "Автоматика – 2000". – 2000. – Т. 1. – С. 231–235.
10. Сеньо П.С. Арифметика лінійних функціональних інтервалів / П.С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2014. – Вип. 21. – С. 38–57.
11. Senio P.S. Two-sided approximatio finding of a function based on mathematics of functional intervals / P.S. Senio // Proceedings of XXXII International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2019). – Prague. Czech Republic. – Kyiv. – August 27-31. – 2018. – P. 146–154.
12. Senio P.S. Matrix representation of Taylor's formula for mappings in finite dimensional spaces / P.S. Senio // Mat. Stud. – 2019. – Vol. 51, № 1. – P. 92–106.

Стаття: надійшла до редколегії 15.09.2021
доопрацьована 03.11.2021
прийнята до друку 24.11.2021

INTERVAL METHODS WITH LOCALIZATION OF FUNCTIONAL UNCERTAINTIES FOR SOLVING VARIATION PROBLEMS

P. Senio, A. Melnychyn

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000,
e-mail: petrosny@ukr.net, andriy.melnychyn@lnu.edu.ua

This paper, based on the analysis of direct methods for solving variational problems, shows the relevance of developing methods for constructing two-sided approximations, which definitely contain the solutions of such problems. In it there is the solution of a variational problem by methods of interval analysis using quadrature formulas is based on reducing this problem to the problem of minimizing the corresponding interval-valued function of many variables by constructing rather narrow interval extensions [2] of the desired function and its derivatives between adjacent quadrature nodes and its residual term. For this purpose, the methods of spline functions were used [6].

The two-sided approximation [9] of the solution of the variational problem is obtained by solving its interval analogue. To construct this interval analogue, the corresponding interval Hermitian splines of the third degree and the interval expansion of the residual term of the quadrature formula were used. The expediency of such an approach should be consistent with the accuracy of the quadrature formula, which is used to highlight the main part of the functional of the variational problem, because otherwise it leads to a significant increase in the amount of calculations. The interval analogue of this variational problem is solved by methods of minimization of the corresponding interval-valued function of many variables.

The proposed algorithm is modified according to the conclusions of Theorem from the [12] on the dynamics of intermediate points of the residual term of Taylor's formula when compressed to the point of the interval of the decomposition of the function.

There are constructed interval methods of localization of functional uncertainties in solving variational problems with conditions that require synchronous solution of optimization problems. The contact problem of thermoelasticity is solved taking into account heat generation at thermal contact of bodies. There is found the law of distribution of compressive force, at which the operation will be minimal, the temperature at the boundary of the half-spaces will not exceed the set critical values, the braking process will take place in the shortest time.

Key words: interval, interval extension of a function, direct methods, two-sided approximation, spline, interval spline.