УДК 517.53

ПРО ТОЧНІСТЬ ОДНІЄЇ ТЕОРЕМИ Р. НЕВАНЛІННИ

М. Заболоцький, Т. Заболоцький, С. Тарасюк

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua, taras.zabolotskyy@lnu.edu.ua,
sviatoslav.tarasyuk@lnu.edu.ua

Клас мероморфних функцій нижнього порядку λ і порядку ρ позначимо $M(\lambda,\rho)$, а $M_{+}^{0}(\lambda,\lambda+1)$ множину $f\in M(\lambda,\lambda+1)$, що задовольняют умови $\varliminf\limits_{r\to+\infty} T(r,f)/r^{\lambda}>0$ і $T(r,f)=o(r^{\lambda+1})$, $r\to+\infty$. Р. Неванлінна довів, що

$$T(r+1,f)\sim T(r,f),\ (r\to+\infty) \tag{*}$$

для $f\in M(\lambda,\rho)$ за умови $\rho-\lambda<1$. А.А. Гольдберг довів, що такі функції f задовольняють співвідношення

$$T(r+\ln r,f)\sim T(r,f),\ (r\to+\infty), \tag{**}$$

а (*) виконується і для функцій з множини $M_{+}^{0}(\lambda,\lambda+1)$.

З'ясовано, що для $f\in M_{+}^{0}(\lambda,\lambda+1)$ співвідношення (**) може не виконуватися.

Ключові слова: мероморфна функція, нижній порядок, порядок, неванліннова характеристика.

1. Вступ

Розглядається одна властивість неванліннівської характеристики $T(r,f)$ мероморфних в $\mathbb{C}$ (надалі мероморфних) функцій f.

Теорема А. [1, с. 271]. *Нехай f – мероморфна функція порядку ρ і нижнього порядку λ. Якщо $\rho-\lambda<1$, то*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{T(r+1,f)}{T(r,f)}=1. \tag{1}$$

Із міркувань [2, с. 208-209] випливає, що за умов теореми А

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{T(r+\ln r,f)}{T(r,f)}=1. \tag{2}$$

В [3] доведено, що в твердженні (2) можна замість $\ln r$ прийняти довільну повільно змінну функцію $L(r)$, тобто додатну неперервно диференційовну на $[1,+\infty)$ функцію L таку, що $rL'(r)=o(L(r))$, $r\to+\infty$. Модифікувавши міркування при доведенні теореми 6.5 з [2], отримуємо твердження.

Теорема Б. *Нехай f – мероморфна функція нижнього порядку $\lambda>0$ і порядку $\rho=\lambda+1$. Якщо $\varliminf\limits_{r\to+\infty} T(r,f)/r^{\lambda}>0$ і $T(r,f)=o(r^{\rho})$, $r\to+\infty$, то виконується (1).*

У випадку $\lambda=0$ з міркувань [2, с. 208-209] легко отримати, що (2) справджується, якщо $T(r,f)=O(r)$, $r\to+\infty$.

Ми доводимо, що у випадку $\lambda>0$ за умов теореми Б та при $\lambda=0$, $\rho=1$ і $T(r,f)\neq O(r)$, $r\to+\infty$ співвідношення (2) може не виконуватись.

2. Формулювання та доведення основних результатів

Правильні такі твердження.

Теорема 1. *Для довільного $\lambda > 0$ існує мероморфна функція f, яка задовольняє умови теореми Б і*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{T(r+\ln r, f)}{T(r,f)} > 1.$$

Теорема 2. *Існує мероморфна функція f, для якої $\lambda = 0$, $\rho = 1$ і $T(r,f) \neq O(r)$ при $r \to +\infty$ і (2) не виконується.*

Для доведення теорем використовуємо такий результат.

Теорема В. [4]. *Нехай Φ неспадна опукла стосовно логарифма на $[1,+\infty)$ функція, $\Phi(r)/\ln r \to +\infty$, $r \to +\infty$. Тоді існує ціла функція f така, що*

$$T(r,f) \sim \Phi(r),\ r \to +\infty.$$

Доведення теореми 1. Нехай f задовольняє умови теореми Б. Завдяки теоремі В для доведення теореми 1 достатньо побудувати приклад стосовно логарифма на $[1,+\infty)$ функції ψ такої, що для довільного $\lambda > 0$ виконується

$$r^{\lambda} \le \psi(r) \le r^{\lambda+1}/\ln r, \tag{3}$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \psi(r+\ln r)/\psi(r) > 1. \tag{4}$$

i) Розглянемо спочатку випадок $\lambda > 1$. Нехай $\alpha = \lambda/(\lambda-1)$ і послідовність додатних чисел така, що $r_1 = \max\{4; e^{\lambda}\}$, $r_{n+1}/r_n^{\alpha} > 2$. Приймемо $r_0^* = 1$ і для $n \in \mathbb{N}$

$$\psi(r) = \begin{cases} r^{\lambda}, \text{ якщо } r_{n-1}^* \le r \le r_n; \\ r_n^{\lambda}\left(\frac{r-r_n}{\ln r_n}+1\right), \text{ якщо } r_n \le r \le r_n^*, \end{cases}$$

де $r_n^* \in [\frac{r_n^{\alpha}}{(\lambda \ln r_n)^{1/(\lambda-1)}}, r_n^{\alpha}]$ таке, що

$$\psi(r_n^*) = (r_n^*)^{\lambda}, \tag{5}$$

$$\psi(r) > r^{\lambda},\ r \in (r_n, r_n^*), \tag{6}$$

$$\frac{\psi(r_n)}{\ln r_n} < \lambda (r_n^*)^{\lambda-1}. \tag{7}$$

Доведемо існування такої точки r_n^*. Для функції $g(r) = r^{\lambda} - \psi(r) = r^{\lambda} - r_n^{\lambda}\left(\frac{r-r_n}{\ln r}+1\right)$, $r \ge r_n$, маємо $g'(r) = \lambda r^{\lambda-1} - \frac{r_n^{\lambda}}{\ln r_n} = 0$ при $r = \tilde{r}_n = \frac{r_n^{\alpha}}{(\lambda \ln r_n)^{1/(\lambda-1)}} < r_n^{\alpha}$, $g'(r) < 0$, $r \in (r_n, \tilde{r}_n)$, $g'(r) > 0$, $r \in (\tilde{r}_n, +\infty)$.

Оскільки $g(r_n) = 0$,

$$g(r_n^{\alpha}) = r_n^{\alpha\lambda} - r_n^{\lambda}\left(\frac{r_n^{\alpha}-r_n}{\ln r_n}+1\right) = r_n^{\alpha}\left(r_n^{\lambda} - \frac{1}{\ln r_n}\right) + r_n^{\lambda}\left(\frac{r_n}{\ln r_n} - 1\right) > 0,$$

то існує $r_n^* \in (\tilde{r}_n, r_n^{\alpha})$ таке, що $g(r_n^*) = 0$, $g(r) < 0$ для $r \in (r_n, r_n^*)$, $g'(r_n^*) > 0$, тобто виконується (5)-(7).

Із співвідношень

$$r\psi'(r) = \lambda r^{\lambda} \text{ зростає на } [r^*_{n-1}, r_n];$$

$$r\psi'(r) = \frac{r_n^{\lambda}}{\ln r_n} r \text{ зростає на } [r_n, r^*_n];$$

$$r_n\psi'(r_n - 0) = \lambda r_n^{\lambda} \le \frac{r_n^{\lambda+1}}{\ln r_n} = r_n\psi'(r_n + 0);$$

$$r^*_n\psi'(r^*_n - 0) = \frac{\psi(r_n)}{\ln r_n} r^*_n \le \lambda (r^*_n)^{\lambda} = r^*_n \psi'(r^*_n + 0) \text{ (див. (7))}$$

отримуємо, що ψ опукла стосовно логарифма на $[1, +\infty)$ функція.

Очевидно, що (3) виконується для $r \in [r^*_{n-1}, r_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Для функції $G(r) = r^{\lambda+1}/\ln r - \psi(r)$, $r \in [r_n, r^*_n]$ виконується

$$G(r_n) = \frac{r_n^{\lambda+1}}{\ln r_n} - r_n^{\lambda} > 0, G'(r) = r^{\lambda}\frac{(\lambda+1)\ln r - 1}{\ln^2 r} - \frac{r_n^{\lambda}}{\ln r_n} \ge G'(r_n) = \frac{\lambda \ln r_n - 1}{\ln^2 r_n} r_n^{\lambda} > 0,$$

а отже, $G(r) > 0$, тобто $\psi(r) \le r^{\lambda+1}/\ln r$ на $[r_n, r^*_n]$. Враховуючи (6) отримуємо, що (3) виконується і для $r \in [r_n, r^*_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Легко бачити, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \psi(r + \ln r)/\psi(r) \ge \lim_{n\to+\infty} \psi(r_n + \ln r_n)/\psi(r_n) = 2,$$

а отжн, справджується (4).

ii) У випадку $0 < \lambda \le 1$ вибираємо послідовність додатних чисел таку, що $r_1 = (4/\lambda)^{10/\lambda}$, $r_{n+1}/r_n^{8/\lambda} > 2$. Приймемо $r^*_0 = 1$, $\hat{r}_n = r_n^2\sqrt{r_n}$ і для $n \in \mathbb{N}$

$$\psi(r) = \begin{cases} r^{\lambda}, \text{ якщо } r^*_{n-1} \le r \le r_n; \\ \psi(r_n)(\frac{r-r_n}{\ln r_n} + 1), \text{ якщо } r_n \le r \le \hat{r}_n; \\ \psi(\hat{r}_n)\left((r - \frac{\lambda\hat{r}_n}{2})^{\lambda/2} + 1 - (\hat{r}_n - \frac{\lambda\hat{r}_n}{2})^{\lambda/2}\right), \text{ якщо } \hat{r}_n \le r \le r^*_n, \end{cases}$$

де $r^*_n \in (\hat{r}_n, r_n^{8/\lambda})$ таке, що

$$\psi(r^*_n) = (r^*_n)^{\lambda}; \tag{8}$$

$$\psi(r) > r^{\lambda},\ r \in (\hat{r}_n, r^*_n); \tag{9}$$

$$\frac{\psi(\hat{r}_n)}{2(r^*_n - \frac{\lambda\hat{r}_n}{2})^{1-\lambda/2}} < (r^*_n)^{\lambda-1}. \tag{10}$$

Доведемо існування точки r^*_n. Для функції

$$g(r) = r^{\lambda} - \psi(r) = r^{\lambda} - \psi(\hat{r}_n)\left(\left(r - \frac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)^{\lambda/2} + 1 - \left(\hat{r} - \frac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)\right), r \ge \hat{r}_n,$$

маємо

$$g'(r) = \frac{\lambda}{r^{1-\lambda}}\left(1 - \frac{\psi(\hat{r}_n)/2}{r^{\lambda/2}}\left(1 - \frac{\lambda\hat{r}_n}{2r}\right)^{\lambda/2-1}\right) = \frac{\lambda}{r^{1-\lambda}}\alpha(r),$$

де $\alpha(r)$ зростає до 1 при $r \to +\infty$,

$$\alpha(\hat{r}_n) = 1 - \frac{r_n^{5/2+\lambda}(1 - \frac{r_n - \ln r}{r_n^2\sqrt{r_n}})}{2(1-\frac{\lambda}{2})^{1-\lambda/2} r_n^{5\lambda/4}} < 1 - \frac{r_n^{5/2-\lambda/4}}{4} < 0,$$

$$\alpha(r_n^{2+5/\lambda}) > 1 - \frac{r_n^{5/2+\lambda} 2^{1-\lambda/2}}{2 r_n^{\lambda/2(2+5/\lambda)}} = 1 - \frac{1}{2^{\lambda/2}} > 0.$$

Отже, існує $\tilde{r}_n \in (\hat{r}_n, r_n^{2+5/\lambda})$ таке, що $g'(\tilde{r}_n) = 0$, $g'(r) < 0$ на $(\hat{r}_n, \tilde{r}_n)$, $g'(r) > 0$ для $r > \tilde{r}_n$.

Оскільки

$$g(\hat{r}_n) = (\hat{r}_n)^\lambda - \psi(\hat{r}_n) = (\hat{r}_n)^\lambda - r_n^\lambda \hat{r}_n \left(1 - \frac{r_n - \ln r}{r_n^2\sqrt{r_n}}\right) < \hat{r}_n \left(\frac{1}{(\hat{r}_n)^{1-\lambda}} - \frac{r_n^\lambda}{2}\right) < 0,$$

$$g(r_n^{8/\lambda}) > r_n^8 - \psi(\hat{r}_n) r_n^4 \left(1 - \frac{\lambda \hat{r}_n}{2 r_n^{8/\lambda}}\right)^{\lambda/2} > r_n^8 - r_n^{\lambda+6.5}\left(1 - \frac{r_n - 1}{r_n^2\sqrt{r_n}}\right) > 0,$$

то існує $r_n^* \in (\tilde{r}_n, r_n^{8/\lambda})$ таке, що $g(r_n^*) = 0$, $g(r) < 0$ на $(\hat{r}_n, r_n^*)$, $g'(r_n^*) > 0$, тобто (8)-(10).

Із співвідношень

$r\psi'(r) = \lambda r^\lambda$ зростає на $[r_{n-1}^*, r_n]$;

$r\psi'(r) = r r_n^\lambda / \ln r_n$ зростає на $[r_n, \hat{r}_n]$;

$r_n \psi'(r_n - 0) = \lambda r_n^\lambda \le r_n^{\lambda+1}/\ln r_n = r_n \psi'(r_n + 0)$;

$r\psi'(r) = \dfrac{\lambda}{2}\psi(\hat{r}_n)\dfrac{r}{(r - \frac{\lambda \hat{r}_n}{2})^{1-\lambda/2}}$ зростає на $[\hat{r}_n, r_n^*]$,

бо $\left(\dfrac{r}{(r-\frac{\lambda\hat{r}_n}{2})^{1-\lambda/2}}\right)' = \dfrac{\frac{\lambda}{2}(r - \hat{r}_n)}{(r - \frac{\lambda\hat{r}_n}{2})^{2-\lambda/2}} \ge 0$;

$\hat{r}_n \psi'(\hat{r}_n - 0) = \dfrac{\hat{r}_n r_n^\lambda}{\ln r_n} \le \hat{r}_n \dfrac{\lambda}{2} r_n^\lambda (\dfrac{\hat{r}_n - r_n}{\ln r_n} + 1)\dfrac{1}{(\hat{r}_n - \frac{\lambda \hat{r}_n}{2})^{1-\lambda/2}} = \hat{r}_n \psi'(\hat{r}_n + 0)$,

бо $\dfrac{\lambda}{2}\dfrac{(\hat{r}_n)^{\lambda/2}(1 - \frac{r_n - \ln r_n}{r_n^2\sqrt{r_n}})}{(1-\lambda/2)^{1-\lambda/2}} \ge \dfrac{\lambda}{4}(\hat{r}_n)^{\lambda/2} > 1$;

$r_n^* \psi'(r_n^* - 0) = r_n^* \dfrac{\psi(\hat{r}_n)\lambda}{2(r_n^* - \frac{\lambda \hat{r}_n}{2})^{1-\lambda/2}} \le (r_n^*)^\lambda \lambda = r_n^* \psi'(r_n^* + 0)$ (див. (10)),

отримуємо, що ϕ опукла стосовно логарифма на $[1, +\infty)$ функція.

Аналогічно, як у випадку і), доведемо, що виконується (3)

$$\rho[\psi] = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\psi(r)}{\ln r} \ge \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\psi(2r_n)}{\ln(2r_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(r_n^{\lambda+1}/\ln r_n - r_n^\lambda)}{\ln(r_n)} = \lambda + 1,$$

$$\lambda[\psi] = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\psi(r)}{\ln r} \le \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\psi(r_n)}{\ln r_n} = \lambda,$$

і враховуючи (3) маємо $\rho[\psi] = \lambda + 1$, $\lambda[\psi] = \lambda$. Нарешті,

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \psi(r + \ln r)/\psi(r) \ge \lim_{n\to+\infty} \psi(r_n + \ln r_n)/\psi(r_n) = 2 > 1,$$

що і треба було довести.

Доведення теореми 2. Завдяки результату праці [4], як і при доведенні теореми 1, нам достатньо побудувати неспадну, опуклу стосовно логарифма на $[1,+\infty)$ функцію ϕ таку, що $\lambda[\phi]=0$, $\rho[\phi]=1$, $\phi(r)\neq O(r)$ при $r\to+\infty$ і $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\phi(r+\ln r)/\phi(r)>1$. Нехай (r_n) послідовність додатних чисел таких, що $r_1=e^2$, $r_{n+1}/r_n^{2r_n}>2$, $\hat r_n=2r_n-\ln r_n$. Приймемо $r_0^*=1$ і для $n\in\mathbb{N}$

$$\phi(r)=\begin{cases}\ln^2 r,\ \text{якщо}\ r_{n-1}^*\le r\le r_n;\\ \phi(r_n)\left(\frac{r-r_n}{\ln r_n}+1\right),\ \text{якщо}\ r_n\le r\le \hat r_n,\\ \phi(\hat r_n)(1+2\ln(r/\hat r_n)),\ \text{якщо}\ \hat r_n\le r\le r_n^*,\end{cases}$$

де $r_n^*\in(r_n^{r_n},r_n^{2r_n})$ така, що

$$\phi(r_n^*)=\ln^2 r_n^*; \tag{11}$$

$$\phi(r)>\ln^2 r,\ r\in(\hat r_n,r_n^*); \tag{12}$$

$$\phi(\hat r_n)<\ln r_n^*. \tag{13}$$

Доведемо існування такої точки r_n^*. Для функції

$$g(r)=\ln^2 r-\phi(r)=\ln^2 r-r_n\ln r_n(1+2\ln(r/\hat r_n),\ r\ge\hat r_n,$$

маємо

$$rg'(r)=2\ln r-2r_n\ln r_n=0\ \text{при}\ r=\tilde r_n=r_n^{r_n},$$

$$g'(r)<0\ \text{на}\ (\hat r_n,\tilde r_n),$$

$$g'(r)>0\ \text{на}\ (\tilde r_n,+\infty).$$

Оскільки $g(\hat r_n)=\ln^2\hat r_n-r_n\ln r_n<0$, $g(r_n^{2r_n})=r_n\ln r_n(2\ln\hat r_n-1)>0$, то існує точка $r_n^*\in(\tilde r_n,\tilde r_n^2)$ така, що $g(r_n^*)=0$, $g(r)<0$ на $(\hat r_n,r_n^*)$, $g'(r_n^*)>0$, тобто виконуються (11)-(13).

Далі

$$r\phi'(r)=\begin{cases}2\ln r,\ [r_{n-1}^*,r_n];\\ r\ln r_n,\ [r_n,\hat r_n];\\ 2\phi(\hat r_n),\ [\hat r_n,r_n^*];\end{cases}$$

$$r_n\phi'(r_n-0)=2\ln r_n\le r_n\ln r_n=r_n\phi'(r_n+0);$$

$$\hat r_n\phi'(\hat r_n-0)=\hat r_n\ln r_n\le 2r_n\ln r_n=\hat r_n\phi'(\hat r_n+0);$$

$$r_n^*\phi'(r_n^*-0)=2\phi(\hat r_n)\le 2\ln r_n^*=r_n^*\phi'(r_n^*+0)\ (\text{див. (13)}),$$

звідки бачимо, що ϕ опукла стосовно логарифма на $[1,+\infty)$.

Доведемо, що

$$\ln^2 r\le\phi(r)\le 2r\ln^2 r,\ r\in[1,+\infty). \tag{14}$$

Для функції $G(r) = 2r\ln^2 r - \phi(r)$ маємо $G(r_n) > 0$, $G'(r) = 2\ln^2 r + 4\ln r - \ln r_n > 0$, на $[r_n, \hat{r}_n]$, $G'(r) = 2\ln^2 r + 4\ln r - 2\phi(\hat{r}_n)/r \geq G'(\hat{r}_n) > 0$ на $[\hat{r}_n, r_n^*]$, а отже, $G(r) > 0$, тобто $\phi(r) < 2r\ln^2 r$ на $[r_n, r_n^*]$.

З вигляду ϕ та (12) отримуємо (14), а отже, $\lambda[\phi] = 0$, $\rho[\phi] \leq 1$. Оскільки

$$\rho[\phi] \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\phi(\hat{r}_n)}{\ln\hat{r}_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(r_n\ln^2 r_n)}{\ln(2r_n - 1)} = 1,$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\phi(r+1)}{\phi(r)} \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{\phi(r_n+1)}{\phi(r_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln^2 r_n}{\ln^2 r_n} = 2,$$

то $\rho[\phi] = 1$ і теорему 2 доведено.

Список використаної літератури

1. Nevanlinna R. Analytic function / R. Nevanlinna. – New-York: Springer-Verlag, 1970, – 373 p.
2. Гольдберг А.А. Распределение значений мероморфных функций / А.А. Гольдберг, И.В. Островский. – Москва: Наука, 1970, – 592 с.
3. Singh A. On Nevanlinna characteristics function / A. Singh // Prac. Nat. Acad. Sci. India. – 1982. – Vol. 52 (A), № 2. – P. 180–183.
4. Clunie J. On integral functions having prescribed asymptotic growth / J. Clunie // Can. J. Mat. – 1965. – Vol. 17, № 3. – P. 396–404.

Стаття: надійшла до редколегії 08.09.2021
доопрацьована 15.10.2021
прийнята до друку 24.11.2021

ON PRECISION OF ONE NEVANLINNA THEOREM

M. Zabolotskyy, T. Zabolotskyy, S. Tarasyuk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000,
e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua, taras.zabolotskyy@lnu.edu.ua,
sviatoslav.tarasyuk@lnu.edu.ua

Denote the class of meromorfic functions of lower order λ and order ρ by $M(\lambda, \rho)$ and by $M_+^0(\lambda, \lambda+1)$ the set of $f \in M(\lambda, \lambda+1)$ which satisfy the condition $\varliminf_{r\to+\infty} T(r,f)/r^\lambda > 0$ and $T(r,f) = o(r^{\lambda+1})$, $r \to +\infty$. R. Nevanlinna showed that

$$T(r+1, f) \sim T(r, f),\ (r \to +\infty) \tag{i}$$

for $f \in M(\lambda, \rho)$ under the condition $\rho - \lambda < 1$. A.A. Goldberg proved that such functions f satisfy the following ratio

$$T(r + \ln r, f) \sim T(r, f),\ (r \to +\infty) \tag{ii}$$

and (i) is fulfilled also for function from the set $M_+^0(\lambda, \lambda+1)$.

In the paper it is showed that for $f \in M_+^0(\lambda, \lambda+1)$ the ratio (ii) may not be executed.

Key words: meromorfic function, lower order, order, Nevanlinna characteristic.