УДК 517.9

ПРО ДЕЯКІ ПИТАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ МАЮТЬ НЕЄДИНИЙ РОЗВ'ЯЗОК

Ю. Сибіль

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університеська, 1, Львів, 79000, e-mail: yuriy.sybil@lnu.edu.ua

Деякі крайові задачі для рівняння Лапласа в процесі застосування методу граничних інтегральних рівнянь зводяться до інтегральних та інтегродиференціальних рівнянь, розв'язки яких неєдині. Під час побудови чисельних алгоритмів для наближеного розв'язування отриманих рівнянь виникають певні труднощі пов'язані з тим, що в процесі дискретизації отримуємо системи лінійних алгебричних рівнянь, матриці яких погано обумовлені. Для розв'язування задач такого типу зручно використовувати модифіковані граничні рівняння, розв'язки яких єдині. Це дає змогу отримати густини інтегрального подання розв'язків відповідних крайових задач у вигляді зручному для наближеного знаходження самого розв'язку та його похідних. Доведено коректність отриманих модифікованих рівнянь, зокрема існування та єдиність розв'язків у відповідних функціональних просторах під час виконання певних додаткових умов. Для цього розглядається загальний випадок лінійних операторних рівнянь, оператори яких мають ненульове ядро. Досліджуються різні випадки задання таких операторів. Зокрема, розглядається випадок двоїстого та самоспряженого операторів. Отримано необхідні та достатні умови коректності модифікованих операторних рівнянь. Як приклади розглядаються зовнішня задача Діріхле та внутрішня задача Неймана для двовимірного рівняння Лапласа. Подання розв'язку зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа у вигляді потенціалу подвійного шару дає змогу звести її до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. З іншого боку, використовуючи потенціали простого або подвійного шару для розв'язування внутрішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа, отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду або сингулярне інтегро-диференціальне рівняння, відповідно. Для всіх цих випадків побудовано модифіковані рівняння, які мають єдині розв'язки.

Ключові слова: лінійні оператори з ненульовим ядром, граничні інтегральні рівняння другого роду, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння, двовимірна зовнішня задача Діріхле для рівняння Лапласа, двовимірна внутрішня задача Неймана для рівняння Лапласа.

1. Вступ

Добре відомо, що використання методу граничних рівнянь, а саме зведення крайових задач до відповідних інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь по межі області, в якій ми шукаємо розв'язок диференціальної задачі, в деяких випадках призводить до проблеми розв'язування рівнянь, розв'язок яких є неєдиним. Це створює додаткові труднощі в процесі побудови та реалізації алгоритмів пошуку наближеного розв'язку отриманих граничних рівнянь. У працях [1, 2] для розв'язування такого типу рівнянь запропоновано процедуру зведення граничних задач до модифікованих рівнянь, розв'язок яких є єдиним.

Ми розглядаємо загальний підхід до розв'язування лінійних рівнянь, розв'язок яких є неєдиним і задовольняє певні умови, з допомогою використання деякого розширення заданих операторів. Отримані оператори бієктивні, а відповідні рівняння мають єдиний розв'язок для довільних правих частин у визначених функціональних просторах. Запропонований підхід дає змогу отримати конкретні розв'язки інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, розв'язки яких неєдині.

© Сибіль Ю., 2020

2. Формулювання задачі та основних співвідношень

Нехай X – дійсний рефлексивний гільбертів простір, X' – двоїстий до X. Вважаємо, що X неперервно та щільно вкладений у дійсний гільбертів простір F, причому $F = F'$. Відповідно маємо неперервне та щільне вкладення $X \subset F \subset X'$. Скалярний добуток в просторі X позначимо $(x, y)_X$, аналогічно в просторах F та X', $\langle \sigma, x \rangle$ – відношення двоїстості, $x \in X$, $\sigma \in X'$.

Розглянемо рівняння

$$Ax = f, \qquad f \in X,$$

де $A : X \to X$ – лінійний неперервний оператор, який задовольняє такі умови.

1. Область визначення $D(A) = X$, область значень $\mathrm{im}A$ є замкнутою в X.
2. $\dim \ker A = 1$, μ_0 – ненульовий розв'язок рівняння $A\mu_0 = 0$.
3. Для двоїстого оператора $A' : X' \to X'$, який визначається рівністю $\langle y, Ax \rangle = \langle A'y, x \rangle$ для довільних $x \in X$, $y \in X'$, матимемо: $\dim \ker A' = 1$, τ_1 – ненульовий розв'язок рівняння $A'\tau_1 = 0$.

Позначимо $\mathcal{W} = \{\mu \in X : (\mu, \mu_0)_X = 0\}$, $\mathcal{V} = \{\mu \in X : (\mu, \mu_0)_F = 0\}$, $\mathcal{U} = \{f \in X : \langle \tau_1, f \rangle = 0\}$. Тоді з вище викладеного випливає, що $A : \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ – ізоморфізм.

Лема 1. *1. Довільний елемент $x \in X$ можна єдиним чином задати у вигляді $x = \mu + c\mu_0$, де $c = \frac{(x,\mu_0)_F}{\|\mu_0\|_F^2}$, $(\mu, \mu_0)_F = 0$.*

2. Якщо $\langle \tau_1, \mu_0 \rangle \neq 0$, то довільний елемент $g \in X$ можна єдиним чином задати у вигляді $g = f + c_g\mu_0$, де $\langle \tau_1, f \rangle = 0$, $c_g = \frac{\langle \tau_1, g \rangle}{\langle \tau_1, \mu_0 \rangle}$.

Доведення. 1. Якщо $g \in X$ – довільний елемент, то $\mu = x - c\mu_o$, де $c = \frac{(x,\mu_0)_F}{\|\mu_0\|_F^2}$ задовольняє умову $(\mu, \mu_0)_F = 0$. Нехай $x = \mu' + c'\mu_0$, де $(\mu', \mu_0)_F = 0$. Тоді $(c - c')\|\mu_0\|_F^2 = 0$. Отже, $c = c'$ і $\mu = \mu'$.

2. Нехай $g \in X$. Якщо $c_g = \frac{\langle \tau_1, g \rangle}{\langle \tau_1, \mu_0 \rangle}$, то $g = f + c_g\mu_0$, де $\langle \tau_1, f \rangle = 0$. Припустимо, що існує інший розклад $g = f' + c'_g\mu_0$, де $\langle \tau_1, f' \rangle = 0$. Тоді $c'_g = c_g$ і $f' = f$. □

Зазначимо, що умова $\langle \tau_1, \mu_0 \rangle \neq 0$ виконується, якщо оператор A задовольняє умову $(Ax, x)_F \neq 0$ для довільних $x \in \mathcal{V}$. Справді, якщо $\langle \tau_1, \mu_0 \rangle = 0$, то рівняння $Ax = \mu_0$ має єдиний розв'язок x, який задовольняє умову $(x, \mu_0)_F = 0$. Відповідно, $(Ax, x)_F = (x, \mu_0)_F = 0$, що суперечить умові $(Ax, x)_F \neq 0$ для довільних $x \in \mathcal{V}$.

Лема 2. *Оператор $A : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ – ізоморфізм.*

Доведення. Нехай послідовність $\{\mu_n\} \subset \mathcal{V}$ збігається до деякого елемента $\mu \in X$. Тоді при $n \to \infty$ отримаємо

$$|(\mu, \mu_0)_F| \leq |(\mu - \mu_n, \mu_0)_F| + |(\mu_n, \mu_0)_F| \leq \|\mu - \mu_n\|_F \cdot \|\mu_0\|_F \leq \|\mu - \mu_n\|_X \cdot \|\mu_0\|_F \to 0.$$

Отож, $\mathcal{V}$ є підпростором X.

Для довільного $f \in \mathcal{U}$ існує єдиний елемент $\mu_1 \in \mathcal{W}$ такий, що $A\mu_1 = f$. Нехай $\mu = \mu_1 - \frac{(\mu_1,\mu_0)_F}{\|\mu_0\|_F^2}\mu_0$. Тоді $A\mu = f$ та $(\mu, \mu_0)_F = 0$. Отже, існує єдиний елемент $\mu \in \mathcal{V}$ такий, що $A\mu = f$ для довільних $f \in \mathcal{U}$. □

Розглянемо оператор $A_1 : X \to X$:

$$A_1 x = Ax + \mu_0 (x, \mu_0)_F.$$

Теорема 3. *Оператор $A_1 : X \to X$ – ізоморфізм, тобто рівняняня $A_1 x = g$ має єдиний розв'язок $x \in X$ для довільних $g \in X$, та виконується нерівність*

$$\|x\|_X \leq c\|g\|_X,$$

де $c > 0$ – деяка константа.

Доведення. Нехай $g \in X$. Тоді $g = f + c_g\mu_0$. Оскільки $f \in \mathcal{U}$, то рівняння $A\mu = f$ має єдиний розв'язок $\mu \in \mathcal{V}$. Розглянемо елемент $x = \mu + \frac{c_g}{\|\mu_0\|_F^2}\mu_0$. Отримаємо

$$A_1x = A\mu + \mu_0(\mu + \frac{c_g}{\|\mu_0\|_F^2}\mu_0, \mu_0)_F = A\mu + \mu_0\frac{c_g}{\|\mu_0\|_F^2}\|\mu_0\|_F^2 = f + c_g\mu_0 = g.$$

Якщо $A_1x = 0$, де $x = \mu_1 + c_1\mu_0$, $\mu_1 \in \mathcal{V}$ та $\mu_1 \neq 0$, то $A\mu_1 + c_1\|\mu_0\|_F^2\mu_0 = 0$. Звідси випливає $\langle\tau_1, \mu_0\rangle = 0$, що неможливо. Отже, $x = 0$.

Отож, рівняння $A_1x = g$ має єдиний розв'язок $x \in X$ для довільного $g \in X$, тобто оператор $A_1 : X \to X$ – бієктивний. Неперервність оператора A_1 очевидна. □

Теорема 4. *Нехай $f \in \mathcal{U}$, а x є розв'язком рівняння $A_1x = g$, де $g = f + c_g\mu_0$, $c_g = \frac{\langle\tau_1, g\rangle}{\langle\tau_1, \mu_0\rangle}$. Тоді $\mu = x - \frac{c_g}{\|\mu_0\|_F^2}\mu_0$ – розв'язок рівняння $A\mu = f$.*

Доведення. Нехай $\mu = x - \frac{c_g}{\|\mu_0\|_F^2}\mu_0$. Оскільки $\langle\tau_1, A_1x\rangle = \langle\tau_1, A\mu + \mu_0(x, \mu_0)_F\rangle = \langle\tau_1, \mu_0\rangle(x, \mu_0)_F = \langle\tau_1, g\rangle$, то $c_g = (x, \mu_0)_F$. Отож $(\mu, \mu_0)_F = (x, \mu_0)_F - c_g = 0$. Отже,

$$A\mu = Ax = A_1x - \mu_0(\mu + \frac{c_g}{\|\mu_0\|_F^2}\mu_0, \mu_0)_F = f + c_g\mu_0 - c_g\mu_0 = f.$$

□

3. Випадок двоїстого оператора

Розглянемо рівняння

$$A'\tau = f,$$

де оператор $A' : X' \to X'$ задовольняє умови п. 2. Відповідно $\dim\ker A' = 1$ і $A'\tau_1 = 0$.

Позначимо $\mathcal{Y} = \{\tau \in X' : (\tau, \tau_1)_{X'} = 0\}$, $\mathcal{Z} = \{f \in X' : \langle f, \mu_0\rangle = 0\}$.

З властивостей операторів A та A' випливає, що $A' : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ – ізоморфізм.

Лема 5. *Оператор $A' : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ є ізоморфізмом.*

Доведення. Для довільного $\sigma \in X'$ існує єдиний розклад $\sigma = \mu + c_\mu\tau_1$, де $\mu \in \mathcal{Y}$, $c_\mu = \frac{(\sigma, \tau_1)_{X'}}{\|\tau_1\|_{X'}^2}$. З іншого боку, для довільного $f \in \mathcal{Z}$ існує єдиний елемент $\mu \in \mathcal{Y}$ такий, що $A'\mu = f$. Розглянемо елемент $\tau = \mu - \tau_1\frac{\langle\mu, \mu_0\rangle}{\langle\tau_1, \mu_0\rangle}$. Тоді $A'\tau = A'\mu = f$ та $\langle\tau, \mu_0\rangle = 0$. Отже, оператор $A' : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ – бієктивний. Крім того, існує єдиний розклад $\sigma = \tau + c_\tau\tau_1$, де $\langle\tau, \mu_0\rangle = 0$ і $c_\tau = \frac{\langle\sigma, \mu_0\rangle}{\langle\tau_1, \mu_0\rangle}$. Оскільки $D(A') = X'$, то $\langle A'\sigma, \mu_0\rangle = 0$ для довільних $\sigma \in X'$. □

Оператор A_1' двоїстий до A_1 має такий вигляд:

$$A_1'\sigma = A'\sigma + \mu_0\langle\sigma, \mu_0\rangle,$$

і як наслідок теореми 3 отримаємо, що оператор $A_1' : X' \to X'$ – ізоморфізм, тобто рівняння $A_1\sigma = g$ має єдиний розв'язок $\sigma \in X'$ для довільного $g \in X'$.

Теорема 6. *Нехай $f \in \mathcal{Z}$, а $\sigma \in X'$ – розв'язок рівняння $A_1'\sigma = g$, де $g = f + c_g\mu_0$, $c_g = \frac{\langle g, \mu_0\rangle}{\|\mu_0\|_F^2}$. Тоді $\tau = \sigma - \frac{c_g}{\langle\tau_1, \mu_0\rangle}\tau_1$, $\tau \in \mathcal{Z}$ є розв'язком рівняння $A'\tau = f$.*

Доведення. Нехай $\tau = \sigma - \frac{c_g}{\langle\tau_1, \mu_0\rangle}\tau_1$.

Оскільки $\langle A_1'\sigma, \mu_0\rangle = \langle A_1\sigma, \mu_0\rangle + \|\mu_0\|_F^2\langle\sigma, \mu_0\rangle = \langle g, \mu_0\rangle$, то $c_g = \langle\sigma, \mu_0\rangle$. Отож, $\langle\tau, \mu_0\rangle = \langle\sigma, \mu_0\rangle - c_g = 0$. Отже,

$$A'\tau = A'\sigma = A_1'\sigma - \mu_0\langle\sigma, \mu_0\rangle = f + c_g\mu_0 - c_g\mu_0 = f.$$

□

4. Випадок самоспряженого оператора

Нехай $H : X \to X'$ – лінійний неперервний оператор, який задовольняє такі умови.

1. Область визначення $D(H) = X$, область значень $\mathrm{im}H$ є замкнутою в X'.
2. $\dim\ker H = 1$, μ_0 – ненульовий розв'язок рівняння $H\mu_0 = 0$.
3. Оператор H самоспряжений: $H' : X \to X'$ і виконується рівність $\langle Hx, y\rangle = \langle Hy, x\rangle$ для довільних $x, y \in X$.
4. Оператор H додатно визначений, тобто існує константа $\alpha > 0$, що для всіх $x \in \mathcal{V}$ виконується нерівність $\langle Hx, x\rangle \geq \alpha\|x\|_X^2$.

Лема 7. *Оператор $H : \mathcal{V} \to \mathcal{Z}$ – ізоморфізм.*

Доведення аналогічне до доведення леми 2.

Розглянемо оператор $H_1 : X \to X'$:

$$H_1\sigma = H\sigma + \mu_0(\sigma, \mu_0)_F.$$

Теорема 8. *Оператор $H_1 : X \to X'$ додатно визначений, тобто існує константа $\gamma > 0$, що для всіх $\sigma \in X$ виконується нерівність: $\langle H_1\sigma, \sigma\rangle \geq \gamma\|\sigma\|_X^2$.*

Доведення. Функцію σ можна єдиним чином подати у вигляді $\sigma = \mu + c_\sigma\mu_0$, де $\mu \in \mathcal{V}$ і $c_\sigma = \frac{(\sigma,\mu_0)_F}{\|\mu_0\|_F^2}$. Тоді

$$\langle H_1\sigma, \sigma\rangle = \langle H\sigma + \mu_0(\sigma, \mu_0)_F, \sigma\rangle = \langle H\mu + \mu_0(\mu + c_\sigma\mu_0, \mu_0)_F, \mu + c_\sigma\mu_0\rangle =$$

$$= \langle H\mu, \mu\rangle + \langle c_\sigma\mu_0\|\mu_0\|_F^2, \mu + c_\sigma\mu_0\rangle\langle H\mu, \mu\rangle + c_\sigma^2\|\mu_0\|_F^4 \geq \alpha\|\mu\|_X^2 + c_\sigma^2\|\mu_0\|_F^4.$$

Оскільки $\|\sigma\|_X^2 \leq 2(\|\mu\|_X^2 + c_\sigma^2\|\mu_0\|_X^2)$, то, вибравши $\gamma = \min\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\|\mu_0\|_F^4}{2\|\mu_0\|_X^2}\}$, отримаємо $\langle H_1\sigma, \sigma\rangle \geq \gamma\|\sigma\|_X^2$. □

Наслідок 9. *Оператор $H_1 : X \to X'$ – ізоморфізм.*

Для роз'язування рівняння $H\mu = f$ з умовою $\mu \in \mathcal{V}$ використаємо розв'язок рівняння $H_1\sigma = g$.

Теорема 10. *Нехай $f \in \mathcal{Z}$, а $\sigma \in X$ є розв'язком рівняння $H_1\sigma = g$, де $g = f + c_g\mu_0$, $c_g = \frac{\langle g,\mu_0\rangle}{\|\mu_0\|_F^2}$. Тоді функція $\mu = \sigma - \frac{c_g}{\|\mu_0\|_F^2}\mu_0$, $\mu \in \mathcal{V}$, є розв'язком рівняння $H\mu = f$.*

Доведення. Якщо $\mu = \sigma - \frac{c_g}{\|\mu_0\|_F^2}\mu_0$, де σ є розв'язком рівняння $H_1\sigma = g$, то

$$H\mu = H\sigma = H_1\sigma - \mu_0(\mu + \frac{c_g}{\|\mu_0\|_F^2}\mu_0, \mu_0) = f + c_g\mu_0 - c_g\mu_0 = 0.$$

□

5. Розв'язування деяких крайових задач

1. Розглянемо зовнішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа (задача D_-): знайти функцію $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_-)$, яка задовольняє рівняння $-\Delta u = 0$ в області Ω_-, граничну умову

$$\gamma_0^- u = f \in H^{1/2}(\Sigma),$$

та умову на нескінченності

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = O(\frac{1}{|x|^2}), \quad |x| \to \infty, \quad i = 1, 2.$$

Тут $\Omega_- = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_+$, де $\Omega_+ \subset \mathbb{R}^2$ обмежена зв'язна Ліпшицева область з межею Σ, $\overline{\Omega}_+ = \Omega_+ \cup \Sigma$. Крім того, вважаємо, що $\operatorname{diam} \Omega_+ \neq 1$. Майже всюди на Σ визначені зовнішня нормаль $\vec{n}_x$ та дотична $\vec{s}_x$, напрям якої вибраний таким чином, що область Ω_+ розташована з правої сторони від $\vec{s}_x$.

Відповідні простори визначені наступним чином:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_-)} = \int_{\Omega_-} \left\{ |\nabla u|^2 + u^2 \right\} dx,$$

$$H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_-) = \{u(x), x \in \Omega_- : \varphi u \in H^1(\Omega_-), \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)\}.$$

Розглянемо потенціали простого та подвійного шару

$$V\tau(x) = \int_\Sigma Q(x, y)\tau(y) ds_y, \quad W\mu(x) = \int_\Sigma \frac{\partial Q(x, y)}{\partial n_y} \mu(y) ds_y, \quad x \in \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

де

$$Q(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad x \neq y.$$

Введемо оператори граничних значень потенціалу подвійного шару $C^- = \gamma_0^- W$ та граничного значення нормальної похідної потенціалу простого шару $B^+ = \gamma_1^+ V$, для яких правильні формули стрибка [3]

$$B^+\tau = \frac{1}{2}\tau + N\tau, \quad C^-\mu = \frac{1}{2}\mu + M\mu,$$

де

$$N\tau = \frac{1}{2}(\gamma_1^+ V\tau + \gamma_1^- V\tau), \quad M\mu = \frac{1}{2}(\gamma_0^+ W\mu + \gamma_0^- W\mu),$$

Тут $\gamma_0^\pm$ та $\gamma_1^\pm$ оператори сліду, що відповідають граничним значенням самої функції та її нормальної похідної, відповідно, в областях Ω_+ та Ω_- [3–5].

Для $\mu \in H^{1/2}(\Sigma)$ та $\tau \in L_2(\Sigma)$ маємо

$$M\mu(x) = \int_\Sigma \frac{\partial Q(x, y)}{\partial n_y} \mu(y) ds_y, \quad N\tau(x) = \int_\Sigma \frac{\partial Q(x, y)}{\partial n_x} \tau(y) ds_y, \quad x \in \Sigma.$$

У цьому випадку $X = H^{1/2}(\Sigma)$, $F = L_2(\Sigma)$, $X' = H^{-1/2}(\Sigma)$, $\mu_0(x) = 1$, $x \in \Sigma$, а τ_1 є розв'язком такого інтегрального рівняння:

$$\int_\Sigma Q(x, y)\tau_1(y) ds_y = 1, \quad x \in \Sigma. \tag{1}$$

Відповідно простори $\mathcal{U}$ та $\mathcal{V}$ матимуть такий вигляд: $\mathcal{U} = \{f \in H^{1/2}(\Sigma) : \langle \tau_1, f \rangle = 0\}$, $\mathcal{V} = \{\mu \in H^{1/2}(\Sigma) : (\mu, \mu_0)_{L_2(\Sigma)} = 0\}$, а $\langle \tau_1, f \rangle = \int_\Sigma \tau_1(y) f(y) ds_y$.

Лема 11. *Оператор $B^+ : H^{-1/2}(\Sigma) \to H^{-1/2}(\Sigma)$ є двоїстим до оператора $C^- : H^{1/2}(\Sigma) \to H^{1/2}(\Sigma)$, тобто $\langle \tau, C^-\mu \rangle = \langle B^+\tau, \mu \rangle$ для довільних $\tau \in H^{-1/2}(\Sigma)$ та $\mu \in H^{1/2}(\Sigma)$.*

Доведення. Нехай $\tau \in H^{-1/2}(\Sigma)$ та $\mu \in H^{1/2}(\Sigma)$. Розглянемо функції $u = V\tau$ і $v = W\mu$. Тоді $\tau = \gamma_1^+ u - \gamma_1^- u$ та $\mu = -\gamma_0^+ v + \gamma_0^- v$. У підсумку отримаємо

$$\langle \tau, C^-\mu\rangle - \langle B^+\tau, \mu\rangle = \langle \gamma_1^+ u - \gamma_1^- u, \gamma_0^- v\rangle - \langle \gamma_1^+ u, -\gamma_0^+ v + \gamma_0^- v\rangle =$$
$$= \langle \gamma_1^+ u, \gamma_0^+ v\rangle - \langle \gamma_1^- u, \gamma_0^- v\rangle = \langle \gamma_1^+ u, \gamma_0^+ v\rangle - \langle \gamma_1^- v, \gamma_0^- u\rangle =$$
$$= \langle \gamma_1^+ u, \gamma_0^+ v\rangle - \langle \gamma_1^+ u, \gamma_0^+ v\rangle = 0.$$

□

Лема 12. *Виконується така умова:* $\langle \tau_1, \mu_0\rangle = \int_\Sigma \tau_1(y) ds_y \neq 0$.

Доведення. Розглянемо функції $u_1 = V\tau$ та $v_1(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}^2$. Тоді функція $v = u_1 - v_1$ є розв'язком задачі D_- з однорідною граничною умовою $\gamma_0^- v = 0$. Якщо $\int_\Sigma \tau_1(y) ds_y = 0$, то $v(x) \to 0$ при $x \to \infty$. З теореми єдиності випливає, що $v = 0$ в $\mathbb{R}^2$. Оскільки $\tau_1 = \gamma_1^+ v - \gamma_1^- v$, то $\tau_1 = 0$, що неможливо, бо τ_1 є розв'язком рівняння (1).
□

Правильне наступне твердження [1].

Лема 13. *Оператор $C^- : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ – ізоморфізм.*

Шукаючи розв'язок задачі D_- у вигляді потенціалу подвійного шару

$$u(x) = \int_\Sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y} \mu(y) ds_y, \quad x \in \Omega_-, \tag{2}$$

ми отримаємо інтегральне рівняння другого роду

$$C^-\mu(x) \equiv \frac{1}{2}\mu(x) + \int_\Sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y} \mu(y) ds_y = f(x), \quad x \in \Sigma.$$

Оператор $C_1^- : H^{1/2}(\Sigma) \to H^{1/2}(\Sigma)$ має такий вигляд:

$$C_1^-\sigma(x) = \frac{1}{2}\sigma(x) + \int_\Sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y} \sigma(y) ds_y + (\sigma, \mu_0)_{L_2(\Sigma)}, \quad x \in \Sigma$$

або

$$C_1^-\sigma(x) = \frac{1}{2}\sigma(x) + \int_\Sigma \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y} + 1\right) \sigma(y) ds_y, \quad x \in \Sigma.$$

Як наслідок теореми 4 отримаємо твердження.

Теорема 14. *Оператор $C_1^- : H^{1/2}(\Sigma) \to H^{1/2}(\Sigma)$ – ізоморфізм, тобто рівняння $C_1^-\sigma = g$ має єдиний розв'язок $\sigma \in H^{1/2}(\Sigma)$ для довільних $g \in H^{1/2}(\Sigma)$, та виконується нерівність*

$$\|\sigma\|_{H^{1/2}(\Sigma)} \leq c\|f\|_{H^{1/2}(\Sigma)},$$

де $c > 0$ – деяка константа.

Якщо σ є розв'язком рівняння $C_1^-\sigma = f + c_g\mu_0$, де $f \in \mathcal{U}$, $c_g = |\Sigma|$ – довжина кривої Σ, то $\mu = \sigma - \mu_0$, $\mu \in \mathcal{V}$, є розв'язком рівняння $C^-\mu = f$.

2. Розглянемо внутрішню задачу Неймана для рівняння Лапласа (задача N_+): знайти функцію $u \in H^1(\Omega_+)$, яка задовольняє рівняння $-\Delta u = 0$ в області Ω_+ та граничну умову

$$\gamma_1^+ u = f \in H^{-1/2}(\Sigma).$$

Як відомо [1, 2], задача N_+ має єдиний розв'язок з точністю до довільної константи, якщо $f \in \mathcal{Z}$, $\mathcal{Z} = \{f \in H^{-1/2}(\Sigma) : \langle f, \mu_0\rangle = 0\}$.

Шукаючи розв'язок задачі N_+ у вигляді потенціалу простого шару,

$$u(x) = \int_\Sigma Q(x,y)\tau(y)ds_y, \quad x \in \Omega_+,$$

отримаємо граничне рівняння

$$B^+\tau \equiv \frac{1}{2}\tau + N\tau = f,$$

або у випадку, коли $\tau, f \in L_2(\Sigma)$, інтегральне рівняння

$$B^+\tau(x) \equiv \frac{1}{2}\tau(x) + \int_\Sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_x}\tau(y)ds_y = f(x), \quad x \in \Sigma.$$

Розглянемо оператор $B_1^+ : H^{-1/2}(\Sigma) \to H^{-1/2}(\Sigma)$

$$B_1^+\sigma = \frac{1}{2}\sigma + N\sigma + \mu_0\langle\sigma, \mu_0\rangle.$$

Якщо $\sigma \in L_2(\Sigma)$, то

$$B_1^+\sigma(x) = \frac{1}{2}\sigma(x) + \int_\Sigma (\frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_x} + 1)\sigma(y)ds_y, \quad x \in \Sigma.$$

Застосувавши теорему 6, отримаємо таке твердження.

Теорема 15. *Оператор $B_1^+ : H^{-1/2}(\Sigma) \to H^{-1/2}(\Sigma)$ – ізоморфізм, тобто рівняння $B_1^+\sigma = g$ має єдиний розв'язок $\sigma \in H^{-1/2}(\Sigma)$ для довільних $g \in H^{-1/2}(\Sigma)$, та виконується нерівність*

$$\|\sigma\|_{H^{-1/2}(\Sigma)} \le c\|f\|_{H^{-1/2}(\Sigma)},$$

де $c > 0$ – деяка константа.

Якщо σ є розв'язком рівняння $B_1^+\sigma = f + c_g\mu_0$, де $f \in \mathcal{Z}$, $c_g = \int_\Sigma \tau_1(y)ds_y$, то $\tau = \sigma - \tau_1$ є розв'язком рівняння $B^+\tau = f$.

Шукаючи розв'язок задачі N_+ у вигляді потенціалу подвійного шару (2), $x \in \Omega_+$, отримаємо граничне рівняння

$$H\mu = f,$$

де $H = \gamma_1^+ W$, $H : H^{1/2}(\Sigma) \to H^{-1/2}(\Sigma)$, або у випадку, коли $f \in L_2(\Sigma)$, сингулярне інтегро-диференціальне рівняння

$$H\mu(x) \equiv -\int_\Sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial s_x}\frac{\partial \mu(y)}{\partial s_y}ds_y = f(x), \quad x \in \Sigma.$$

В монографії [5] показано справедливість наступного твердження.

Теорема 16. *Оператор $H : \mathcal{V} \to H^{-1/2}(\Sigma)$ – додатно визначений, тобто існує константа $c > 0$ така, що для всіх $\mu \in H^{1/2}(\Sigma)$, які задовольняють умову $(\mu, \mu_0)_{L_2(\Sigma)} = 0$, виконується нерівність*

$$\langle H\mu, \mu\rangle \ge c\|\mu\|^2_{H^{1/2}(\Sigma)}.$$

Оператор $H_1 : H^{1/2}(\Sigma) \to H^{-1/2}(\Sigma)$ набуває вигляду

$$H_1\sigma = H\sigma + \mu_0(\sigma, \mu_0)_{L_2(\Sigma)},$$

де $(\sigma, \mu_0)_{L_2(\Sigma)} = \int_\Sigma \sigma(y) ds_y$. У випадку, коли $\sigma \in H^1(\Sigma)$

$$H_1\sigma(x) = -\int_\Sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial s_x}\frac{\partial \sigma(y)}{\partial s_y} ds_y + \int_\Sigma \sigma(y) ds_y.$$

Як наслідок теорем 8 та 10 отримаємо наступні твердження.

Теорема 17. *Оператор $H_1 : H^{1/2}(\Sigma) \to H^{-1/2}(\Sigma)$ – додатно визначений, тобто існує константа $\gamma > 0$, що для всіх $\sigma \in H^{1/2}(\Sigma)$ виконується нерівність*

$$\langle H_1\sigma, \sigma\rangle \geq \gamma \|\sigma\|^2_{H^{1/2}(\Sigma)}.$$

Теорема 18. *Оператор $H_1 : H^{1/2}(\Sigma) \to H^{-1/2}(\Sigma)$ – ізоморфізм, тобто рівняння $H_1\sigma = g$ має єдиний розв'язок $\sigma \in H^{1/2}(\Sigma)$ для довільних $g \in H^{-1/2}(\Sigma)$, та виконується нерівність*

$$\|\sigma\|_{H^{1/2}(\Sigma)} \leq c\|f\|_{H^{-1/2}(\Sigma)},$$

де $c > 0$ – деяка константа.

Якщо σ – розв'язок рівняння $H_1\sigma = f + c_g\mu_0$, де $f \in \mathcal{Z}$, $c_g = |\Sigma|$, то $\mu = \sigma - \mu_0$ є розв'язком рівняння $H\mu = f$.

Оскільки $\gamma_1^+ W = \gamma_1^- W$, то, використовуючи інтегральне подання (2), де μ є розв'язком рівняння $H\mu = f$, отримаємо розв'язок задачі Неймана для рівняння Лапласа у внутрішній області Ω_+ та зовнішній області Ω_-.

6. Висновки

Доведено коректність модифікованих лінійних рівнянь, які отримали за допомогою заданих операторів з певними властивостями, ядро яких є ненульовим, тобто відповідні однорідні рівняння мають ненульові розв'язки. Для отримання розв'язків вихідних лінійних рівнянь достатньо розв'язати модифіковані рівняння без використання додаткових умов, причому шукані розв'язки будуть мати наперед визначені властивості. Це дає змогу будувати ефективні чисельні алгоритми для наближеного розв'язування граничних задач, які зводяться до інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь, розв'язок яких неєдиний.

Зазначимо, що аналогічно розглядається випадок граничних задач у багатозв'язних областях. В цьому випадку $\dim \ker A = k > 1$.

Список використаної літератури

1. *Мазья В. Г.* Граничные интегральные уравнения / В. Г. Мазья // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. – Москва: 1988. – Т. 27. – С. 131–228.
2. *Михлин С. Г.* Курс математической физики / С. Г. Михлин. – Москва: Наука, 1968. – 576 с.
3. *Costabel M.* Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results / M. Costabel // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – Vol. 19 – P. 613–626.
4. *Lions J. L.* Nonhomogeneuos boundary-value problems and applications / J. L. Lions, E. Magenes. – Springer-Verlag, 1972. – Vol. 1.

5. *McLean W.* Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations / W. McLean. – Cambridge University Press, 2000. – 357 p.

Стаття: надійшла до редколегії 05.10.2020
доопрацьована 15.10.2020
прийнята до друку 19.10.2020

ON SOME PROBLEMS OF SOLVING LINEAR EQUATIONS THAT HAVE A NON-UNIQUE SOLUTION

Yu. Sybil

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, e-mail: *yuriy.sybil@lnu.edu.ua*

Some boundary value problems for Laplace equation are reduced to integral and integro-differential equations, whose solutions are not unique. During the construction of numerical algorithms for approximate solution of the obtained equations there are some difficulties due to the fact that in the process of discretization we obtain systems of linear algebraic equations whose matrices are poorly conditioned. To solve such problems it is convenient to use modified boundary equations, the solutions of which are unique. This gives us possibility to obtain densities of the integral representations of solutions of the corresponding boundary value problems in the form convenient as for approximate finding of the solution so for its derivatives In this paper we prove the correctness of the obtained modified equations, in particular existence and uniqueness of solutions in the corresponding functional spaces with certain additional conditions. To do this, we consider the general case of linear operator equations whose operators have a nonzero kernel. Various cases of such operators are investigated. In particular, the case of dual and self-adjoint operators is considered. We obtained necessary and sufficient conditions of correctness for received modified operator equations. As examples we consider exterior Dirichlet and interior Neumann boundary value problems for the two-dimensional Laplace equation. Representation of the solution of the exterior Dirichlet problem for the Laplace equation in the form of a double layer potential gives us possibility to reduce it to the integral Fredholm equation of the second kind. On the other hand, using the potentials of a single or double layer to solve the interior Neumann problem for the Laplace equation, we obtain Fredholm integral equation of the second kind or singular integro-differential equations respectively. For all these cases modified equations are constructed and solutions of obtained equations are unique.

Key words: linear operators with a nonzero kernel, boundary integral equations of the second kind, singular integro-differential equations, two-dimensional Dirichlet exterior boundary value problem for Laplace equation, two-dimensional interior Neumann boundary value problem for Laplace equation.