ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

ОДИН ВАРІАНТ МЕТОДУ СТЕФФЕНСЕНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

М. Бартіш, О. Ковальчук, Н. Огородник

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: olha.kovalchuk@lnu.edu.ua, ogorodnyk.nataly@gmail.com

Математичне моделювання складних фізичних процесів часто потребує розв'язування систем нелінійних рівнянь. Не існує універсальних методів щоб успішно розв'язати ці проблеми для широкого кола задач. Отже, проблема побудови нових ефективніших алгоритмів актуальна. Розглянемо як знаходити розв'язок для системи нелінійних рівнянь. Існує багато підходів для відшукання розв'язків цієї системи. Найвідоміший ітераційний метод для розв'язування цієї проблеми – метод Ньютона. Цей метод стартує з точки x_0 та після k ітерацій. Якщо задовольниться вибраний критерій, то зупиняється. Перевага методу Ньютона в тому, що отримана послідовність збігається квадратично до розв'язку задачі, якщо початкова точка близька до точного розв'язку. Однак метод має деякі недоліки. Одним з них є вибір початкової точки. Добра початкова точка може призвести до збіжності методу за декілька ітерацій. Для поліпшення початкової точки можна знайти в літературі різні методи. Суттєвим недоліком методу Ньютона є те, що на кожному кроці потрібно обчислювати матрицю Якобі, отже, це складна задача. Для вирішення цієї проблеми можна скористатися різницевим варіантом методу Ньютона. Пропонуємо розглянути узагальнений метод Стеффенсена, який є комбінацією методу простої ітерації та різницевого методу. У запропонованому методі швидкість збіжності не менша, ніж у класичному методі. Чисельні експерименти свідчать про ефективність запропонованого методу. Подаємо теорему про збіжність методу та доводимо. В цій теоремі умови накладаються на функцію лише в початквій точці. На підставі числових розрахунків і порівняння отриманих результатів доведено, що запропонований метод дає змогу зменшити обчислювальні затрати для отримання розв'язку.

Ключові слова: метод Ньютона, різницевий метод, поділена різниця, метод простої ітерації, метод Стеффенсена.

1. Вступ

Математичне моделювання складних фізичних процесів дуже часто потребує розв'язування систем нелінійних рівнянь. Універсальних методів для успішного розв'язування широкого класу подібних задач немає, тому актуальною є проблема побудови нових, ефективніших алгоритмів. Існує багато підходів для відшукання розв'яків систем нелінійних рівнянь. Найліпший ітераційний метод для розв'язування цієї проблеми – метод Ньютона. Перевага методу Ньютона полягає в тому, що отримана послідовність збігається квадратично до розв'язку задачі, якщо початкова точка близька до точного розв'язку. Однак метод має деякі недоліки. Одим з них – вибір початкової точки. Добра початкова точка може призвести до збіжності методу за декілька ітерацій. Суттєвим недоліком методу Ньютона є те, що на кожному кроці потрібно обчислювати матрицю Якобі, що само собою є складною задачею. Для вирішення цієї проблеми можна скористатися різницевим варіантом методу Ньютона.

Ми розглянемо метод на підставі різницевого методу Ньютона та методу простої ітерації [3] для розв'язування систем нелінійних рівнянь.

2. Формулювання задачі

Нехай задане нелінійне функціональне рівняння

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

де $P(x)$ оператор, який діє з банахового простору X у банахів простір Y.

Подамо рівняння (1) у вигляді

$$P(x) = x - \varphi(x) = 0 \tag{2}$$

і будемо розглядати лише випадок, коли виконується умова

$$sup\,\|\varphi'(x)\| = K < 1. \tag{3}$$

Класичним методом для розв'язування (1) є метод Ньютона. У випадку, коли виконуєтся умова (3), можна використовувати метод простої ітерації. Однак використання такого методу приводить до значної кількості обчислень, оскільки збіжність методу лінійна. Ми розглядатимемо деяку модифікацію методу Ньютона з урахуванням цієї умови.

Для розв'язування рівняння (2) розглянемо ітераційний процес [4]

$$x_{k+1} = x_k - [P(x_k, \varphi(x_k))]^{-1} P(x_k), k = 0, 1, ... \tag{4}$$

де $P(x, y)$ – поділена різниця оператора $P(x)$ за точками x та y [5]. Для доведення збіжності узагальненого методу ми спростили умови, які накладаються на оператор $P(x)$.

3. Обґрунтування збіжності

Теорема 1. *Нехай виконуються умови.*

1. *Для початкового наближення x_0 існує оператор $\Gamma_0 = [P(x_0, \varphi(x_0))]^{-1}$, причому $\|\Gamma_0\| \le B_0$.*
2. *$\|P(x_0)\| \le \eta_0$.*
3. *Для $x, y, z \in \Omega_0 = \{x : \|x - x_0\| \le 2B_0\eta_0\}$ виконується $\|P(x, y, z)\| \le M$.*
4. *$h_0 = B_0(1 + B_0)M\eta_0 < \frac{1}{4}$.*

Тоді рівняння (2) має в області Ω_0 розв'язок x_*, і послідовність $\{x_n\}$ при $n \ge 0$ збігається до нього та справджується оцінка

$$\|x_n - x^*\| \le (1 - h_0^{'})^{n-1} C_0^{2^n - 1} B_0 \eta_0 \tag{5}$$

де $C_0 = \dfrac{h_0}{(1 - h_0^{'})^2}$, $h_0^{'} = B_0^2 M(1 + K)\eta_0$.

Доведення. Доведення проведемо за схемою Канторовича [2].

1. Перевіримо виконання умов для точки x_1. Розглянемо тотожність

$$\Gamma_1 = [P(x_1, \varphi(x_1))]^{-1} = \{I - \Gamma_0 P((x_0, \varphi(x_0)) - P(x_1, \varphi(x_1)))\}^{-1} \Gamma_0.$$

Тепер

$$\begin{aligned}&\|P(x_0,\varphi(x_0))-P(x_1,\varphi(x_1))\|=\\&\quad=\|P(x_0,\varphi(x_0))-P(x_1,\varphi(x_0))+P(x_1,\varphi(x_0))-P(x_1,\varphi(x_1))\|=\\&\quad=\|P(x_0,\varphi(x_0),x_1)(x_0-x_1)+P(x_1,\varphi(x_0),\varphi(x_1))(\varphi(x_0)-\varphi(x_1))\|\le\\&\quad\le M(K+1)\,\|x_0-x_1\|\le MB_0(K+1)\eta_0.\end{aligned}$$

Тоді за теоремою Банаха існує обернений оператор Γ_1 і справджується оцінка

$$\|\Gamma_1\|\le\frac{B_0}{1-MB_0^2(K+1)\eta_0}\le\frac{B_0}{(h_0^{'})}=B_1.$$

2. З тотожності $P(x_1)=P(x_1)-P(x_0)-P(x_0,\varphi(x_0))(x_1-x_0)$ отримаємо

$$\begin{aligned}&\|P(x_1)\|=\|P(x_1,x_0)-P(x_0,\varphi(x_0))\|\cdot\|x_1-x_0\|=\\&\quad=\|P(x_0,\varphi(x_0),x_1)(x_1-\varphi(x_0))\|\,\|x_1-x_0\|\le\\&\quad\le M\,\|x_1-x_0\|\,\|x_1-x_0+x_0-\varphi(x_0)\|\le M(B_0+1)B_0\eta_0^2=h_0\eta_0=\eta_1.\end{aligned}$$

3. Із того, що $x\in\Omega_1=\{x:\|x-x_1\|\le 2B_1\eta_1\}$, випливає, що $x\in\Omega_0$. Справді,

$$\|x-x_0\|\le\|x-x_1\|+\|x_1-x_0\|\le 2B_1\eta_1+B_0\eta_0=2\frac{B_0}{1-h_0^{'}}h_0\eta_0+B_0\eta_0\le 2B_0\eta_0.$$

Безпосередньо підстановкою отримаємо

$$\begin{aligned}h_1=MB_1(1+B_1)\eta_1&\le M\frac{B_0}{1-h_0^{'}}(1+\frac{B_0}{1-h_0^{'}})h_0\eta_0\le\\&\le\frac{MB_0(1+B_0)}{(1-h_0^{'})^2}h_0\eta_0\le\frac{h_0^2}{(1-h_0^{'})^2}\le C_0h_0.\end{aligned}$$

4. $C_1=\dfrac{h_1}{(1-h_1^{'})^2}=\dfrac{C_0h_0^{'}}{(1-h_0^{'})^2}\le C_0^2.$

5. $\|x_2-x_1\|\le B_1\,\|P(x_1)\|=\dfrac{B_0}{(1-h_0^{'})}((1-h_0^{'}))^2C_0\eta_0=B_0(1-h_0^{'})C_0\eta_0.$

Використовуючи метод метаматичної індукції, припустимо, що умови теореми виконуються для довільної точки x_k при $k=2,3,...$ а саме:

1) $\|\Gamma_k\|=\left\|P(x_k,\varphi(x_k))^{-1}\right\|=$

$$=\left\|I-\Gamma_{k-1}\left\{P(x_{k-1},\varphi(x_{k-1}))-P(x_k,\varphi(x_k))\right\}^{-1}\Gamma_{k-1}\right\|$$

$$\le\frac{B_{k-1}}{(1-h_{k-1}^{'})}\le\frac{B_0}{(1-h_0^{'})^k};$$

2) $\|P(x_k)\|\le M(B_{k-1}+1)B_{k-1}\eta_{k-1}^2\le C_0^{2^k-1}(1-h_0^{'})^{2k}\eta_0=\eta_k;$

3) $h_k=B_k(1+B_kM\eta_k)=C_0^{2^k-1}h_0;$

4) $C_k=\dfrac{h_k}{(1-h_k^{'})^2}=\dfrac{C_0^{2^k-1}h_0}{(1-h_0^{'})^2}\le C_0^{2^k};$

5) $\|x_{k+1}-x_k\|\le B_k\eta_k=B_0C_0^{2^k-1}(1-h_0^{'})^k\eta_0.$

З нерівності

$$\|x_{k+p}-x_k\| \le \sum_{i=k}^{k+p-1}\|x_{k+i}-x_i\| \le \sum_{i=k}^{k+p-1} B_0 C_0^{2^i-1}(1-h_0^{'})^i\eta_0 =$$

$$= B_0\eta_0(1-h_0^{'})^k C_0^{2^k-1}\sum_{i=k}^{k+p-1} C_0^{2^i-2^k}(1-h_0^{'})^{i-k} \le$$

$$\le B_0\eta_0(1-h_0^{'})^k C_0^{2^k-1}\frac{1}{1-(1-h_0^{'})C_0^{2^k}}$$

випливає збіжність $\{x_k\}$ до x_*. Аналогічно отримаємо $\lim_{k\to\infty}\|P(x_k)\| = \|P(x_*)\| = 0$. Тобто, x_* є розв'язком рівняння (1). Також при $k\to\infty$ одержимо

$$\|x_k-x_*\| \le B_0\eta_0(1-h_0^{'})^{k-1}C_0^{2^k-1}$$

Тепер доведемо, що $x_k\in\Omega_0$. Справді,

$$\|x_k-x_0\| \le \sum_{i=0}^{\infty}\|x_{i+1}-x_i\| \le \sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_0}{(1-h_0^{'})^i}C_0^{2^i-1}(1-h_0^{'})^{2i}\eta_0 =$$

$$= B_0\eta_0\sum_{i=0}^{\infty}C_0^{2^i-1}(1-h_0^{'})^i \le 2B_0\eta_0.$$

□

4. Апробація методу

Тестування методу проведено на двох прикладах. Ці приклади ми побудували, щоб виконувалася умова (3).

Приклад 1.

$$P_{2i-1} = x_{2i-1} - \frac{10}{21}sin(x_{2i-1}) - \frac{10}{21}cos(x_{2i}),$$
$$P_{2i} = x_{2i} + \frac{10}{21}sin(x_{2i-1}) + \frac{10}{21}cos(x_{2i}) - \frac{\pi}{2},$$
$$i = 1, ..., n/2.$$
$$x^* = (0; \frac{\pi}{2}).$$
$$x_0 = (0, 0).$$

Приклад 2.

$$P_{2i-1} = 2x_{2i-1}^2 - 2x_{2i}^2 + 1 - 4x_{2i-1},$$
$$P_{2i} = -4 * x_{2i-1}^4 - 4x_{2i}^4 + 8x_{2i} + 4 - 12x_{2i},$$
$$i = 1, ..., n/2.$$
$$x^* \approx (-0.0123675; 0.72449194).$$
$$x_0 = (0, 0).$$

Таблиця 1

Приклад 1

n	метод (6)		метод (7)	
	H	K	H	K
4	8	58	5	31
16	8	152	5	91
52	8	440	5	271
100	8	824	5	511

Таблиця 2

Приклад 2

n	метод (6)		метод (7)	
	H	K	H	K
4	6	44	4	25
16	6	116	4	73
52	6	332	4	217
100	6	620	5	511

Всі обчислення проводили до виконання умови $\|x_{k+1} - x_k\| \leq 10^{-8}$. У таблицях наведено кількість ітерацій (Н) і кількість обчислень(К) вектор-функції F, затрачених для отримання наближення до розв'язку задач із заданою точністю.

Позаяк у більшості випадків досить важко підібрати вдале початкове наближення, тому використовують демпфований множник [1]. Отже, остаточно методи, для яких проводили чисельні експерименти набудуть такого вигляду:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k[P(x_k)]^{-1}P(x_k), k = 0, 1, ... \tag{6}$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k[P(x_k, \varphi(x_k))]^{-1}P(x_k), k = 0, 1, ... \tag{7}$$

де $\alpha_k \in (0; 1]$.

5. Висновок

Розглянуто різницевий аналог методу Ньютона, який доволі близький до методу Стеффенсена [4]. Зроблено теоретичні та числові дослідження алгоритму (4) та доведено його збіжність, у спрощених умовах, які накладаються на оператор $P(x)$ше в початковій точці. На підставі числових розрахунків і порівняння отриманих результатів доведено, що розглянутий метод допомагає зменшити обчислювальні затрати для отримання розв'язку.

Список використаної літератури

1. *Дэннис Дж.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р. Шнабель. – Москва: Мир, 1988.
2. *Канторович Л. В.* Приближённое решение функциональных уравнений / Л. Канторович // УМН. – 1956. – Т. 11. – № 6. – С. 99–116.

3. *Ковальчук О. В.* Комбінація методів Ньютона та простої ітерації для розвя'язування систем нелінійних рівнянь / О. Ковальчук // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: матеріали конференції. – Львів, 7 - 9 квітня, 2014. – С. 94.
4. *Ульм С. Ю.* Обобщение метода Стеффенсена для решение нелинейных операторных уравнений / С. Ю. Ульм // Журнал Вычис. матем. и матем. физики. – 1964. – Т. 4. – № 6. – С. 1093–1097.
5. *Ульм С. Ю.* Об обобщенных разделенных разностях / С. Ю. Ульм // Известия АН ЭССР. – 1967. – Т. 16. – № 1. – С. 13–26.

Стаття: надійшла до редколегії 18.11.2019
доопрацьована 20.11.2019
прийнята до друку 20.11.2019

ONE VARIANT OF THE STEFFENSEN'S METHOD FOR SOLVING OPERATOR EQUATIONS

M. Bartish, O. Kovalchuk, N. Ogorodnyk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine,
e-mail: olha.kovalchuk@lnu.edu.ua, ogorodnyk.nataly@gmail.com

Mathematical modeling of complex physical processes often requires the solution of systems of nonlinear equations. There are no universal methods for successfully solving this problem for a wide range of tasks. Therefore, the problem of constructing new more efficient algorithms is urgent. In this paper, we look at how to find a solution to a system of nonlinear equations. There are many approaches to finding solutions to this system. One of the most famous iterative methods for solving this problem is the Newton's method. This method starts with an initial guess x_0 and stops after k updates iterations, if the selected criterion is satisfied. The advantage of the Newton's method is that the obtained sequence coincides quadratically with the solution of the problem if the starting point is close to the exact solution. However, the method has some disadvantages. One is to choose a starting point. A good starting point can lead to a convergence of the method in several iterations. Various methods can be found in the literature to improve the starting point. A significant disadvantage of the Newton's method is that every step requires the calculation of the Jacobi matrix, which in itself is already a difficult task. To solve this problem, you can use some variant of the Newton's method. In this article, we propose to consider a generalized Steffensen's method, which is a combination of the fixed point method and the difference method. In the proposed method, the convergence rate is not less than in the classical method. Numerical experiments show the effectiveness of the proposed method. We also present a method convergence theorem and prove it. In this theorem, conditions are imposed on a function only at the starting point. Based on the numerical calculations and the comparison of the results obtained, it is shown that the proposed method allows reducing the computational costs for the solution.

Key words: Newton's method, divided difference, fixed point method, Steffensen's method.