

УДК 519.6

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧІ АДВЕКЦІЇ-ДИFUЗІЇ-РЕАКЦІЇ НА ОСНОВІ ГЕТЕРОГЕННОГО ПІДХОДУ

І. Сподар, Я. Савула

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: spodariv@gmail.com, yarema.savula@lnu.edu.ua*

Запропоновано схему методу скінченних елементів для числового аналізу задачі адвекції-дифузії-реакції на підставі гетерогенного підходу з використанням алгоритму декомпозиції області Діріхле-Ноймана. Цей алгоритм полягає у розбитті розрахункової області на підобласті без перетину та розв'язуванні підзадач на кожній з підобластей. На одній підобласті формулюють задачу з крайовими умовами Діріхле, на іншій – з крайовими умовами Ноймана. Розв'язуючи ітераційно отримані задачі, знаходять послідовності функцій, що збігаються до розв'язків вихідної гетерогенної задачі.

Для розв'язування кожної з підзадач застосовано метод скінченних елементів. За допомогою розробленого програмного забезпечення виконано триангуляцію підобластей та отримано числові результати для великих чисел Пекле. В одновимірному випадку знайдено аналітичний розв'язок для порівняння та верифікації результатів. У двовимірному випадку введено спеціальні пробні функції, побудовані шляхом додавання в стандартні пробні функції методу Гальоркіна стабілізуючих елементів. Вибравши пробні функції з більшою вагою на стороні набігаючого потоку, вдалося досягти стійкості та відсутності неприродних осциляцій розв'язку. Виконано верифікацію числових результатів за допомогою перевірки порядку збіжності методу шляхом порівняння з аналітичним розв'язком модельної задачі, а також шляхом використання схеми Ейткена за відсутності аналітичного розв'язку.

Результати обчислювальних експериментів демонструють збіжність застосованого методу за досить невеликої кількості скінченних елементів, тоді як метод скінченних елементів дає значні осциляції навіть на густій сітці. Отримані результати підтверджують, що апостеріорний порядок збіжності близький до апіорного, що свідчить про ефективність застосованого підходу для числового аналізу задачі адвекції-дифузії-реакції за великих значень числа Пекле.

Ключові слова: задача адвекції-дифузії-реакції, метод Діріхле-Ноймана, метод скінченних елементів.

1. ВСТУП

Задача адвекції-дифузії-реакції (АДР) – основа для математичного моделювання процесів переносу в однорідних і неоднорідних середовищах. Вона має важливі застосування у вирішенні проблем масоперенесення у живих тканинах, перебігу хімічних реакцій, поширення забруднень, прогнозування погоди, та ін. Відомо [1–8], що процеси числового аналізу задачі АДР у випадку великих чисел Пекле нестійкі. Для регуляризації цих процесів в останні роки запропоновано низку методів [1–6, 9]. У [7] розвинено підхід до вирішення проблеми регуляризації обчислювального процесу для задачі АДР, який базується на гетерогенній математичній моделі та застосуванні методу Діріхле-Ноймана. У цій праці цей підхід реалізовано з використанням методу скінченних елементів (МСЕ), побудованого на основі методів Гальоркіна та Петрова-Гальоркіна.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу адвекції-дифузії-реакції

$$\begin{cases} Au = \operatorname{div}(-\nu \nabla u + bu) + b_0 u = f & \text{в } \Omega, \\ u = g & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – обмежена область; $\nu > 0$ – характеристичний параметр; $b = b(x)$ – d -вимірна вектор-функція; $b_0 = b_0(x)$, $g = g(x)$, $f = f(x)$ – задані скалярні функції.

Позначимо

$$Pe(x) = \frac{|b(x)|}{2\nu} \quad (2)$$

число Пекле. Називатимемо задачу (1) задачею з переважанням адвекції у випадку $Pe(x) \gg 1$.

Розглянемо одновимірну задачу

$$\begin{cases} Au = -\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d}{dx}(bu) + u = 1, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

де $b > 0$.

Її точний розв'язок набуває вигляду

$$u(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + 1,$$

$$\text{де } c_1 = \frac{1 - e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}, c_2 = \frac{e^{\lambda_1} - 1}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}, \lambda_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4}}{2}, \lambda_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2}.$$

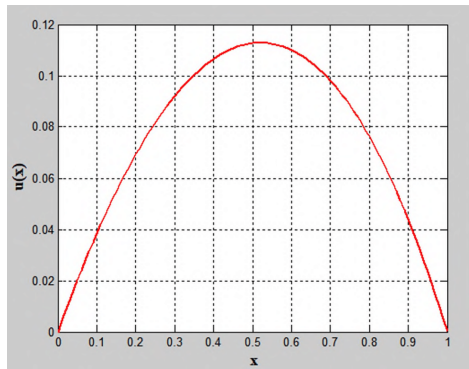


Рис. 1. Точний розв'язок задачі (3) при $Pe(x)=0.5$

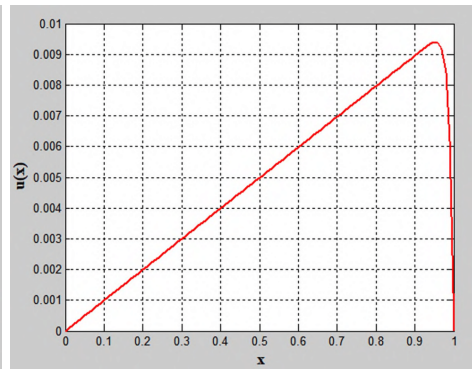
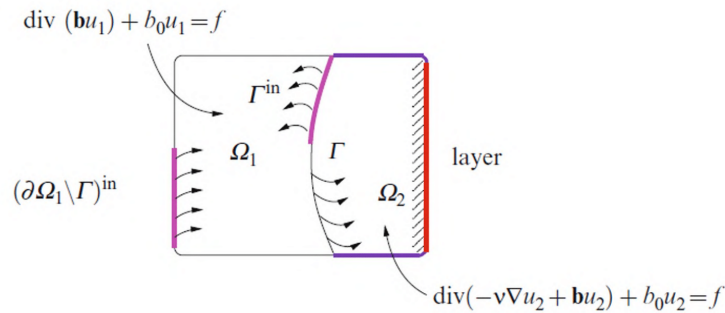


Рис. 2. Точний розв'язок задачі (3) при $Pe(x)=100$

На рис. 1-2 зображено графіки розв'язку для різних значень числа Пекле. Видно, що тільки у другому випадку з'являється крайовий шар.

Коли $Pe(x) \gg 1$, дифузія відбувається тільки в невеликій частині області, поблизу крайового шару, тоді як нею можна формально знехтувати в іншій частині, де переважає адвекція. Тому ідея така: розділити розрахункову область Ω на підобласті Ω_1 і Ω_2 без перетину. Після цього процес розв'язання звести до двох задач на підобластях Ω_1 , Ω_2 (рис. 3) [7].

Рис. 3. Спрощена задача (4) на області Ω

$$\begin{cases} A_1 u_1 = \operatorname{div}(b u_1) + b_0 u_1 = f & \text{в } \Omega_1, \\ A_2 u_2 = \operatorname{div}(-\nu \nabla u_2 + b u_2) + b_0 u_2 = f & \text{в } \Omega_2, \\ \text{Крайові умови} & \text{на } \partial \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Вибір підобластей Ω_1 і Ω_2 залежить від значення числа Пекле: чим воно більше, тим більшою буде Ω_1 . Зокрема, для задачі (3) при $Pe(x) = 0.5$ (рис. 1) дифузія відбувається майже на всій області, тому точку x_0 , яка розбиває область Ω на підобласті Ω_1 і Ω_2 , варто обрати близькою до 0, щоб уникнути великих похибок. У випадку $Pe(x) = 100$ (рис. 2) на більшій частині області переважає адвекція, тому оптимальним буде вибір точки x_0 близько до правого краю, наприклад, $x_0 = 0.9$.

3. МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДІРІХЛЕ-НОЙМАНА

Згідно з методом Діріхле-Ноймана [7] процес розв'язання задач (4) зводиться до ітераційного.

Нехай задано $\lambda^{(0)}, k \geq 0$.

$$\begin{cases} A_1 u_1^{(k+1)} = f & \text{в } \Omega_1, \\ u_1^{(k+1)} = g & \text{на } (\partial \Omega_1 \setminus \Gamma)^{in}, \\ u_1^{(k+1)} = \lambda^{(k)} & \text{на } \Gamma^{in}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} A_2 u_2^{(k+1)} = f & \text{в } \Omega_2, \\ u_2^{(k+1)} = g & \text{на } \partial \Omega_2 \setminus \Gamma, \\ -\nu \frac{\partial u_2^{(k+1)}}{\partial n_\Gamma} + b \cdot n_\Gamma u_2^{(k+1)} = b \cdot n_\Gamma u_1^{(k+1)} & \text{на } \Gamma, \end{cases} \quad (6)$$

$$\lambda^{(k+1)} = (1 - \vartheta) \lambda^{(k)} + \vartheta u_2^{(k+1)} \Big|_\Gamma,$$

де $\vartheta > 0$ – параметр релаксації, n_Γ – вектор нормалі, напрямлений з Ω_1 в Ω_2 , $\Gamma^{in} = \{x \in \Gamma : b(x) \cdot n_\Gamma(x) < 0\}$ – границя, через яку відбувається перенесення субстанції з Ω_2 в Ω_1 (рис. 3).

Збіжність методу Діріхле-Ноймана забезпечується такою теоремою [7]

Теорема 1. Нехай задано $\lambda^{(0)} \in \mathcal{E}$ і $\exists \delta : \vartheta \in (0.1 + \delta)$. Тоді послідовності $(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$ збігаються до пари (u_1, u_2) так:

$$u_1^{(k)} \rightarrow u_1 \text{ в } L^2(\Omega_1), \quad u_2^{(k)} \rightarrow u_2 \text{ в } H^1(\Omega_2).$$

Пара (u_1, u_2) визначає єдиний розв'язок задачі (5)-(6).

За критерій зупинки ітераційного процесу використано такі нерівності:

$$\begin{cases} \|u_1^{(k)} - u_1^{(k-1)}\| < \varepsilon, \\ \|u_2^{(k)} - u_2^{(k-1)}\| < \varepsilon, \end{cases}$$

де ε – достатньо мале додатне число.

4. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Запишемо задачу (4) у вигляді

$$\begin{cases} A_1 u_1 = \operatorname{div}(b u_1) + b_0 u_1 = f & \text{в } \Omega_1, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} A_2 u_2 = \operatorname{div}(-\nu \nabla u_2 + b u_2) + b_0 u_2 = f & \text{в } \Omega_2, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} u_1 = g & \text{на } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} u_2 = g & \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma, \end{cases} \quad (10)$$

де $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega} \subset R^2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.

Потрібно знайти такі $u_1 \in \Omega_1$ і $u_2 \in \Omega_2$, що задовольняють рівняння (7)-(8), крайові умови (9)-(10) та збігаються на межі Γ підобластей Ω_1 і Ω_2 .

Задамо умови спряження функцій u_1 і u_2

$$b \cdot n_\Gamma u_1 + \nu \frac{\partial u_2}{\partial n_\Gamma} - b \cdot n_\Gamma u_2 = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (11)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{на } \Gamma. \quad (12)$$

Застосування методу Діріхле-Ноймана до задачі (7)-(12) приводить до ітераційного процесу (5)-(6). Задаємо $\lambda^{(0)}$, розв'язуємо 2 крайові задачі. Тоді на підставі отриманих результатів обчислюємо наступне значення $\lambda^{(1)}$. Розв'язок на кожній з підобластей Ω_1 і Ω_2 шукатимемо за допомогою методу скінченних елементів.

Застосуємо класичний МСЕ до задачі (6). Використаємо такий алгоритм триангуляції. Область розбивають на трикутні скінченні елементи Ω_e (рис. 4). Вибирають точки триангуляції. Для кожної з них будують прямокутник за принципом «вправо і ввверх». Якщо всі точки прямокутника належать області, то розбивають його на 2 трикутники. Якщо одна з точок не належить області, то будують трикутник по інших трьох. Якщо дві або три точки прямокутника не належать області, то трикутник не будують.

Позначимо літерами i, j, m вершини трикутника з відповідними координатами: $x_1^i, x_2^i, x_1^j, x_2^j, x_1^m, x_2^m$, літерою p – біжучу внутрішню точку трикутника з координатами x_1, x_2 .

На трикутнику Ω_e побудуємо функції $\varphi_k^{(e)}(x_1, x_2)$, $k = i, j, m$, за формулою

$$\varphi_i^{(e)}(x_1, x_2) = \frac{S_{pjm}}{S_{ijm}},$$

де S_{pjm}, S_{ijm} – площі трикутників pjm та ijm .

Легко бачити, що $\varphi_i^{(e)}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = 1$ і $\varphi_i^{(e)}(x_1, x_2) = 0$ на лінії jm .

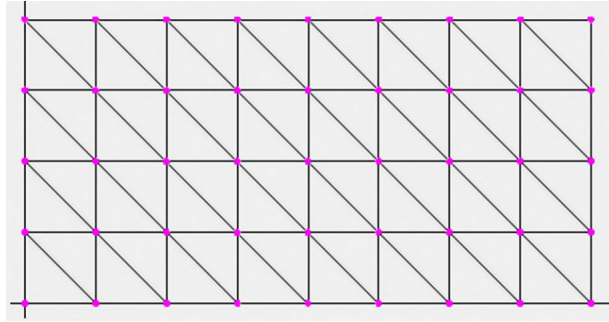


Рис. 4. Триангуляція

Використовуючи ідеї, викладені в [5], на об'єднанні трикутних елементів Ω_e побудуємо такі кусково-лінійні базисні функції:

$$\varphi_i^h(x_1, x_2) = \begin{cases} \varphi_i^{(e)}, & i \in \Omega_e, \\ 0, & i \notin \Omega_e. \end{cases} \quad (13)$$

Домножимо початкове рівняння (8) на функцію v , що задовольняє граничну умову, і зінтегруємо отримане рівняння по області Ω_2

$$\int_{\Omega_2} \operatorname{div}(-\nu \nabla u_2 v + b u_2 v) d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} b_0 u_2 v d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} f v d\Omega_2.$$

Наближений розв'язок на скінченному елементі подамо у вигляді

$$u_e = N_e(x_1, x_2) q_e.$$

Тут $N_e = (\varphi_i^{(e)}, \varphi_j^{(e)}, \varphi_m^{(e)})$; $q_e = (u_i^h, u_j^h, u_m^h)$; u_i^h, u_j^h, u_m^h – значення апроксимуючої функції у вершинах трикутника.

Враховуючи (13), отримаємо

$$u_e = u_i^h \varphi_i^{(e)} + u_j^h \varphi_j^{(e)} + u_m^h \varphi_m^{(e)}.$$

За пробні функції v обираємо функції N_e .

Після нескладних перетворень отримаємо систему лінійних рівнянь [5] для знаходження наближеного розв'язку u^h задачі (6).

Однак застосування методу Гальоркіна до задачі (5) призводить до значних осциляцій (рис. 5).

Тому скористаємось методом Петрова-Гальоркіна з використанням модифікованих пробних функцій. Ця процедура полягає в необхідності додавання у стандартні вагові функції методу Гальоркіна стабілізуючих елементів. Вибравши вагову функцію з більшою вагою на стороні набігаючого потоку, можна досягти стійкості та відсутності неприродних осциляцій.

Введемо пробну функцію

$$\begin{aligned} \psi_i(x_1, x_2) &= \varphi_i(x_1, x_2) - \alpha \gamma(x_1, x_2), \\ \gamma(x_1, x_2) &= w_n \varphi_i(x_1, x_2) \varphi_j(x_1, x_2) \varphi_m(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (14)$$

де $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_m$ – кусково-лінійні базисні функції МСЕ; w_n – нормальна складова вектора швидкості; α – параметр, який дає змогу контролювати вплив допоміжної функції $\gamma(x_1, x_2)$.

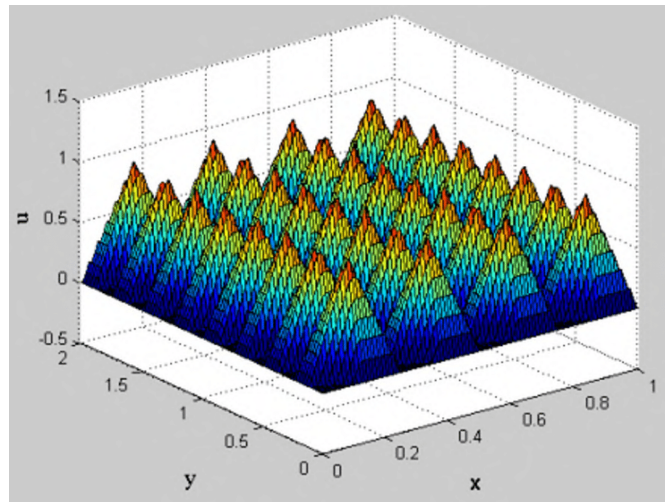


Рис. 5. Зображення розв'язку задачі (5) методом скінченних елементів

На рис. 6-8 подано зображення базисної функції $\varphi_i(x_1, x_2)$ та пробної функції $\psi_i(x_1, x_2)$ залежно від напрямку вектора швидкості.

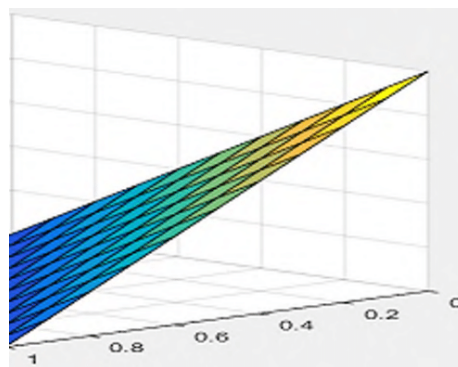


Рис. 6. Базисна функція $\varphi_i(x_1, x_2)$

5. ЧИСЛОВІ ПРИКЛАДИ

Нехай $\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$, $f = 1$, $b_0 = 1$, $b = [100, 0]$, $v = 1$, $g = 0$, $\vartheta = 0.7$, $\alpha = 0.45$. При $\varepsilon = 10^{-6}$ збіжність методу досягається за 17 ітерацій. Ілюстрація розв'язку подана на рис. 9. Видно, що перенесення відбувається тільки в напрямі осі x , тоді як в напрямі осі y функція залишається незмінною. Відсутність осциляцій свідчить про те, що застосування обраних пробних функцій приводить до очікуваних результатів.

Нехай $\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$, $f = 1$, $b_0 = 1$, $b = [100, 100]$, $v = 1$, $g = 0$, $\vartheta = 0.7$, $\alpha = 0.01$. При $\varepsilon = 10^{-6}$ збіжність методу досягається за 22 ітерації. Ілюстрація розв'язку подана на рис. 10. У цьому випадку перенесення відбувається в обох напрямках.

З наведених рисунків 9, 10 можна зробити висновок, що отримані розв'язки є

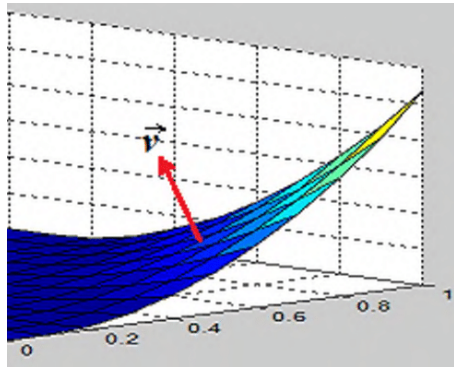
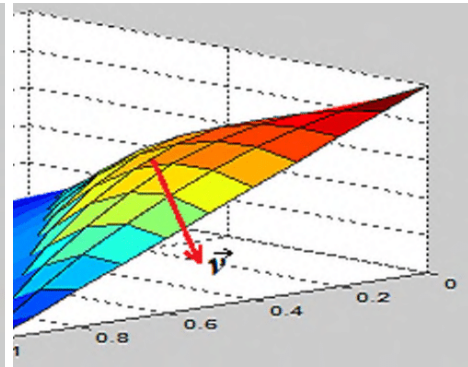
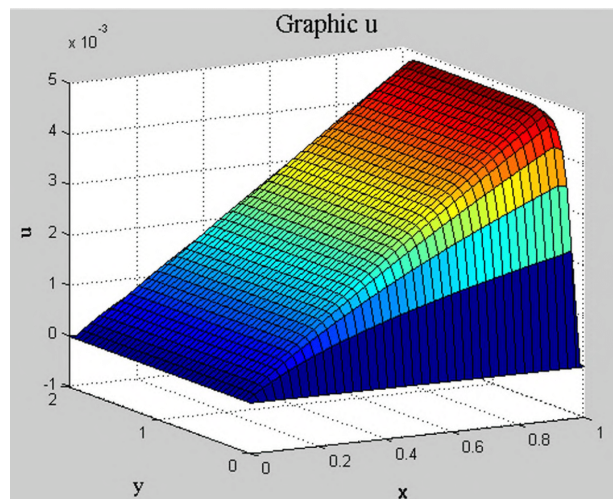
Рис. 7. Пробна функція $\psi_i(x_1, x_2)$ Рис. 8. Пробна функція $\psi_i(x_1, x_2)$ 

Рис. 9. Ілюстрація розв'язку з використанням 1024 скінченних елементів

стійкими, а їхня поведінка відповідає природному процесу. Отже, застосування методу Діріхле-Ноймана з використанням модифікованих пробних функцій до сформульованої задачі ефективно.

Для подальшої верифікації розв'язку на двох протилежних границях області задають однорідну умову Ноймана, а на двох інших – однорідну умову Діріхле. Розв'язок матиме вигляд циліндра, тобто на кожній з прямих $x_2 = a$, де $a \in [0, 2]$, він буде однаковим. Тому якщо зафіксувати координату x_2 , то отримаємо аналог одновимірного випадку, який можна порівняти з аналітичним розв'язком (рис.11-12) задачі (3).

З наведених рисунків 11,12 видно, що розв'язки подібні.

Проведемо верифікацію отриманих результатів для цього випадку, коли відомий точний розв'язок, за порядком збіжності [8]. Використаємо відомий результат [9], що порядок збіжності в нормі простору L_2 становить 2, а в нормі простору $W_2^{(1)}$ – 1.

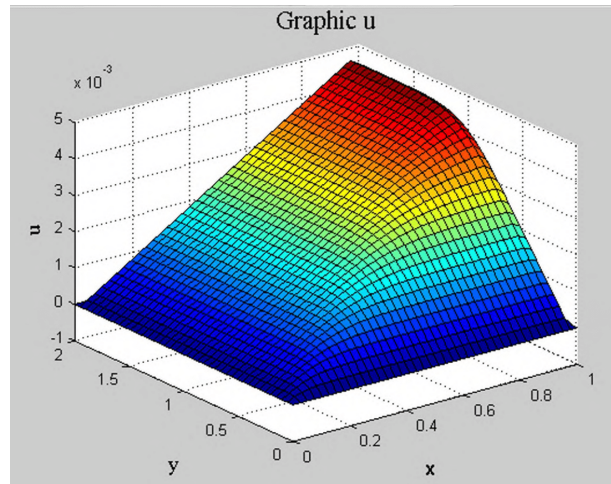


Рис. 10. Ілюстрація розв'язку з використанням 1024 скінченних елементів

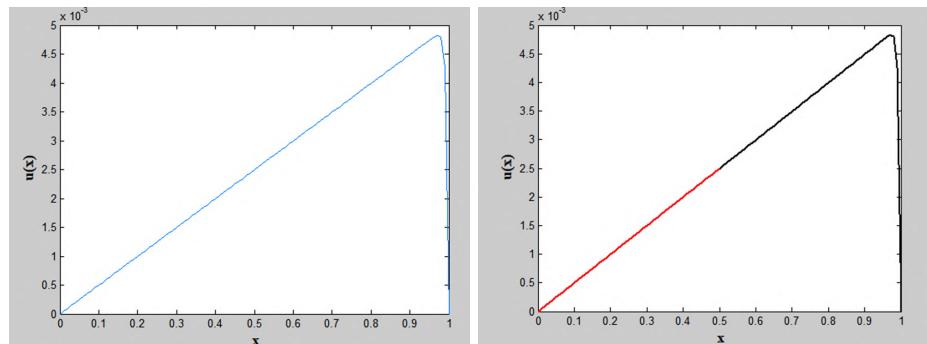


Рис. 11. Розв'язок на фіксованій прямій з використанням 1024 скінченних елементів, $b = [100, 0]$

Рис. 12. Аналітичний розв'язок в одновимірному випадку

Припустимо, що метод має p -й порядок збіжності

$$\|u - u_h\|_{L_2} = Ch^p \|u\|_{W_2^{(2)}}.$$

Знайдемо наближені розв'язки для розбиття h_1 та h_2 , відповідно, u_{h_1} та u_{h_2} . Позначимо

$$\begin{aligned} e_1 &= \|u - u_{h_1}\|_{L_2} = Ch_1^p \|u\|_{W_2^{(2)}}, \\ e_2 &= \|u - u_{h_2}\|_{L_2} = Ch_2^p \|u\|_{W_2^{(2)}}. \end{aligned}$$

Тоді за такою формулою можна визначити експериментальний порядок збіжності:

$$p = \frac{\ln(e_1) - \ln(e_2)}{\ln(h_1) - \ln(h_2)}.$$

Для $\|u - u_h\|_{L_2} \Rightarrow p \approx 2$, $\|u - u_h\|_{W_2^{(1)}} \Rightarrow p \approx 1$.

Якщо точний розв'язок невідомий – застосовуємо схему Ейткена [8]. Для цього потрібно обчислити розв'язок на трьох розбиттях h_1, h_2, h_3 з кроком h, qh, q^2h , відповідно. Потім за такою формулою знаходимо порядок збіжності:

$$p = \frac{1}{\ln(q)} \ln \left(\frac{\|u_{h_3}\| - \|u_{h_2}\|}{\|u_{h_2}\| - \|u_{h_1}\|} \right),$$

де $q = \frac{h_i}{h_{i-1}}$, $i = 2, 3$; u_{h_j} – наближений розв'язок на сітці h_j , $j = 1, 2, 3$.

Таблиця 1

Порядок збіжності порівняно з аналітичним розв'язком

	L_2	$W_2^{(1)}$
Апріорний порядок збіжності	2	1
Апостеріорний порядок збіжності, $N = 512$	1.951	0.934
Апостеріорний порядок збіжності, $N = 1024$	1.982	0.950

Таблиця 2

Порядок збіжності за схемою Ейткена

	L_2	$W_2^{(1)}$
Апріорний порядок збіжності	2	1
Апостеріорний порядок збіжності, $N = 512$	1.975	0.942
Апостеріорний порядок збіжності, $N = 1024$	1.989	0.992

Отриманий експериментальний порядок збіжності наведено в табл. 1, 2. Тут N – кількість скінчених елементів на найдрібнішій сітці.

Як видно з табл. 1, 2, порядок збіжності у просторі L_2 збігається з апріорним, тобто близький до 2. Аналогічний висновок можна зробити і щодо простору Соболева, де порядок збіжності близький до апріорного значення 1. В обох випадках апостеріорний порядок збіжності стає ближчим до апріорного зі збільшенням кількості скінчених елементів.

6. ВИСНОВКИ

Результати обчислювальних експериментів демонструють ефективність підходу, заснованого на гетерогенній моделі і методі Діріхле-Ноймана, для числового аналізу задачі АДР за великих значень чисел Пекле. Задовільна якість числових результатів отримується за досить негустих сіток МСЕ. Верифікація отриманих числових розв'язків підтверджує очікуваний теоретичний порядок збіжності МСЕ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кіндибалюк А. Властивості кусково-степеневих апроксимацій МСЕ для сингулярно збурених задач адвекції-дифузії-реакції / А. Кіндибалюк, Г. Шинкаренко // Вісник Львівського університету. Серія : Прикладна математика та інформатика. – 2014. – Вип. 21. – С. 99–109.
2. Козаревська Ю. С. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: локалізовані найменші квадрати / Ю. С. Козаревська, Г. А. Шинкаренко, О. Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 52. – С. 59–71.
3. Кухарський В. Модифікований метод залишково-вільних бульбашок для розв'язування задач адвекції-дифузії з великими числами Пекле / В. Кухарський, Я. Савула, І. Кривень // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформатика. – 2013. – Вип. 20. – С. 85–94.
4. Мандзак Т. Математичне моделювання і числовий аналіз адвекції-дифузії у неоднорідних середовищах / Т. Мандзак, Я. Савула. – Львів: Сплاین, 2009. – 146 с.
5. Савула Я. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Савула. – Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.
6. Сподар Н. Застосування різномасштабного методу скінченних елементів до розв'язування одновимірної задачі адвекції-дифузії / Н. Сподар, Я. Савула // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – Вип. 19. – С. 190–197.
7. Bertoluzza S. Modeling, numerics and applications / S. Bertoluzza, R. H. Nochetto, A. Quarteroni, K. G. Siebert, A. Veiser // C.I.M.E. Summer School, Cetrato, Italy. – 2009. – P. 314.
8. Knupp P. Verification of computer codes in computational science and engineering / K. Sauri // Chapman & Hall/CRC. – 2003. – 144 p.
9. Savula Y. Replacements in finite element method for the problem of advection-diffusion-reaction / Y. Savula, Y. Turchyn // Journal of numerical and applied mathematics. Series "Numerical Mathematics". – 2019. – № 1 (130). – P. 84–98.

Стаття: надійшла до редколегії 18.05.2020

доопрацьована 05.10.2020

прийнята до друку 07.10.2020

**HETEROGENEOUS APPROACH TO THE SOLUTION OF
THE ADVECTION-DIFFUSION PROBLEM**

I. Spodar, Ya. Savula

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, 79000, Lviv, Ukraine,
e-mail: spodariv@gmail.com, yarema.savula@gmail.com*

The scheme of the finite element method is proposed for numerical analysis of the advection-diffusion-reaction problem based on a heterogeneous approach using the Dirichlet-Neumann domain decomposition algorithm. This algorithm consists in dividing the computational domain into subdomains without intersection and solving subproblems on each of them. A problem with Dirichlet boundary conditions is formulated in one subdomain, with Neumann boundary conditions – in another subdomain. The sequences of functions that coincide to the solutions of the original heterogeneous problem can be found by solving iteratively the obtained problems.

The finite element method is used to solve each of the subproblems. Triangulation of subdomains is performed and numerical results are obtained for large Peclet numbers using the developed software. An analytical solution is found to compare and verify the results in the one-dimensional case. The special test functions that were constructed by adding

stabilizing elements to the standard test functions of the Galerkin method are introduced in the two-dimensional case. Stability and absence of unnatural oscillations of the solution are achieved by choosing the test functions with bigger weight on the side of the incident flow. The numerical results are verified by checking the order of convergence of the method by comparing it with the analytical solution of the model problem, as well as by using the Aitken scheme if there is no analytical solution.

The results of computational experiments show the convergence of the method used with a sufficiently small number of finite elements, while the finite element method gives significant oscillations even on a fine grid. The obtained results demonstrate that a posteriori order of convergence is close to a priori one, which confirms effectiveness of the applied approach for numerical analysis of the advection-diffusion-reaction problem with large Peclet numbers.

Key words: advection-diffusion-reaction problem, Dirichlet-Neumann algorithm, finite element method.