УДК 519.6

СХЕМА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО СТЕПЕНЯ

А. Недашковська

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: nastia.nedashkovska@gmail.com

Більшість прикладних задач зводиться до розв'язування систем алгебричних рівнянь. Тому важко переоцінити роль методів знаходження розв'язку таких систем у прикладній математиці. У працях Боднар Д. І. була наведена нова ітераційна схема розв'язування систем поліноміальних рівнянь другого степеня шляхом розвинення розв'язку в ланцюговий матричний дріб. Схожий підхід можна застосувати і для розв'язування матричних рівнянь, які виникають у багатьох теоретичних і прикладних дисциплінах. Зокрема, в задачах оптимального керування, стабілізації керованих лінійних систем та ін. Попри значний розвиток і широке застосування ортогональних методів, питання розв'язування матричних рівнянь не є вичерпаним: знаходження хоча б одного з існуючих розв'язків матричного рівняння є великим успіхом. Ми запропонували схему розв'язування матричного поліноміального рівняння третього степеня. Після деяких елементарних перетворень розв'язування цього матричного рівняння зводиться до знаходження розв'язку системи двох матричних рівнянь із двома невідомими. Отримано рекурентні співвідношення для знаходження наближених розв'язків заданого поліноміально-нелінійного рівняння. Описано алгоритм їхньої реалізації. Наведено достатні умови збіжності методу, проведено чисельні експерименти, які підтверджують ефективність запропонованої схеми.

Ключові слова: ітераційний метод, поліноміальні рівняння, збіжність, ланцюгові дроби.

1. Вступ

Розв'язування матричних рівнянь є дуже складною, а тому не дуже популярною задачею в обчислювальній математиці. Зазвичай кожне рівняння чи систему матричних рівнянь досліджують і розв'язують у конкретному випадку. Лиш у 1972 році автори Бартелс Р. Х. і Стюарт Г. В. [1] описали метод, який дав змогу алгоритмізувати розв'язування неперервних і дискретних рівнянь Сильвестра, Ляпунова та Ріккаті. Цей метод було включено до пакета програм на Фортрані для лінійних задач управління [2], він започаткував розробку так званих ортогональних методів розв'язування матричних рівнянь.

Попри значний розвиток і широке застосування ортогональних методів, питання розв'язування матричних рівнянь не є вичерпаним: і сьогодні знаходження хоча б одного з існуючих розв'язків матричного рівняння є великим успіхом. У статті запропоновано схему розв'язування поліноміального рівняння третього степеня.

2. Обчислювальна схема методу

У [3] розглядали метод розв'язування системи поліноміальних рівнянь другого степеня над полем дійсних чисел. Такий метод можна узагальнити також і на систему матричних рівнянь.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} A_{XX}X^2+A_{YX}YX+A_{XY}XY+A_{YY}Y^2+A_XX+A_YY+A_E=0; \\ B_{XX}X^2+B_{YX}YX+B_{XY}XY+B_{YY}Y^2+B_XX+B_YY+B_E=0, \end{cases}$$

де A_{XX}, A_{YX}, A_{XY}, A_{YY}, A_X, A_Y, A_E, B_{XX}, B_{YX}, B_{XY}, B_{YY}, B_X, B_Y, B_E, X, Y – квадратні матриці розміру $p \times p$.

Цю систему можна записати по-іншому

$$\begin{cases} (A_{XX}X+A_{YX}Y+A_X)\,X+(A_{XY}X+A_{YY}Y+A_Y)\,Y+A_E=0; \\ (B_{XX}X+B_{YX}Y+B_X)\,X+(B_{XY}X+B_{YY}Y+B_Y)\,Y+B_E=0. \end{cases} \tag{1}$$

Систему (1) можна подати у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} A_{XX}X+A_{YX}Y+A_X & A_{XY}X+A_{YY}Y+A_Y \\ B_{XX}X+B_{YX}Y+B_X & B_{XY}X+B_{YY}Y+B_Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -A_E \\ -B_E \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Нехай запис $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \circ X$ позначає добуток $\begin{pmatrix} A_{11}X & A_{12}X \\ A_{21}X & A_{22}X \end{pmatrix}$, тоді рівність (2) можна записати так:

$$\left[\begin{pmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ B_{XX} & B_{XY} \end{pmatrix}\circ X+\begin{pmatrix} A_{YX} & A_{YY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{pmatrix}\circ Y+\begin{pmatrix} A_X & A_Y \\ B_X & B_Y \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -A_E \\ -B_E \end{pmatrix}.$$

Тоді для знаходження вектора $\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}^T$ можна записати таку рекурентну формулу:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ B_{XX} & B_{XY} \end{pmatrix}\circ X+\begin{pmatrix} A_{YX} & A_{YY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{pmatrix}\circ Y+\begin{pmatrix} A_X & A_Y \\ B_X & B_Y \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} -A_E \\ -B_E \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Або

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\left\{\left[\begin{pmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ B_{XX} & B_{XY} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} A_{YX} & A_{YY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{pmatrix}\right]\circledcirc\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_X & A_Y \\ B_X & B_Y \end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix} -A_E \\ -B_E \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тут запис $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\circledcirc\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ позначає суму $A \circ X + B \circ Y$.

Застосуємо тепер описану схему до розв'язування матричного рівняння третього степеня.

Нехай

$$A_3X^3 + A_2X^2 + A_1X + A_0 = 0. \tag{5}$$

Рівняння (5) можна записати у вигляді

$$\left(A_3X^2+(k+1)\,A_2X - mA_1\right)X - kA_2X^2+(m+1)\,A_1X + A_0 = 0, \tag{6}$$

де k та m – деякі відмінні від нуля константи.

Позначимо тепер

$$Y = A_3X^2 + (k+1)\,A_2X - mA_1,$$

тоді (5) можна записати у вигляді системи матричних рівнянь

$$\begin{cases} -kA_2X^2 + YX + (m+1)\,A_1X + A_0 = 0; \\ A_3X^2 + (k+1)\,A_2X - Y - mA_1 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

До системи (7) застосуємо (3), тоді для знаходження розв'язку (5) отримаємо рекурентну формулу

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix} -kA_2 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}\circ X+\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\circ Y+\begin{pmatrix} (m+1)A_1 & 0 \\ (k+1)A_2 & -E \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} -A_0 \\ mA_1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

3. Збіжність схеми для матричного рівняння третього степеня

Нехай

$$C = \begin{pmatrix} -kA_2 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} (m+1)A_1 & 0 \\ (k+1)A_2 & -E \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} -A_0 \\ mA_1 \end{pmatrix},$$

тоді (8) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \left(F + (C, D) \circ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)^{-1} H. \tag{9}$$

На підставі (9) можна записати розвинення розв'язку в такий матричний ланцюговий дріб

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \left(F + (C, D) \circ \left(F + (C, D) \circ (F + \ldots)^{-1} H \right)^{-1} H \right). \tag{10}$$

Дріб (10) запишемо тепер у компактній формі Прінгсгейма

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{H|}{|F} + (C, D) \circ \frac{H|}{|F} + \ldots = \frac{F^{-1}H|}{|E} + (C, D) \circ \frac{F^{-1}H|}{|E} + \ldots \tag{11}$$

У [4] було узагальнено достатню умову збіжності Ворпіцького. Цю ознаку можна застосувати для аналізу збіжності матричного ланцюгового дробу (11)

Теорема 1. *Матричний ланцюговий дріб*

$$\sum_{k_1=1}^{n} \frac{A_{k_1}|}{|E} + \sum_{k_2=1}^{n} \frac{A_{k_1 k_2}|}{|E} + \ldots + \sum_{k_1=1}^{n} \frac{A_{k_1 k_2 \ldots k_l}|}{|E} + \ldots$$

є абсолютно збіжним, якщо виконується умова

$$\|A_{k_1 k_2 \ldots k_i}\| \leq \frac{1}{4n} \, (i = 1, 2, 3, \ldots; k_i = 1, 2, \ldots, n) \, .$$

Застосуємо теорему 1 до ланцюгового дробу (11). Очевидно, що ланцюговий дріб (11) буде збігатися абсолютно, якщо виконується умова

$$\left\| (C, D) \circ F^{-1} H \right\| \leq \frac{1}{4}. \tag{12}$$

Підставляючи значення C, D, F, H у нерівність (12), отримаємо достатню умову збіжності матричного ланцюгового дробу (11)

$$\left\| \left(\begin{pmatrix} -kA_2 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} (m+1)A_1 & 0 \\ (k+1)A_2 & -E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -A_0 \\ mA_1 \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{1}{4}. \tag{13}$$

4. Алгоритм знаходження розв'язку

Врахувавши попередні викладення, для знаходження розв'язку рівняння (5) на підставі (8) можемо побудувати такий алгоритм:

1. Задати похибку $\varepsilon > 0$.
2. Задати початкове наближення, невироджену матрицю $X^{(0)} \in R^{p \times p}$, константи $k \neq -1$, $m \neq -1$ так, щоб виконувалася достатня умова збіжності (13).
3. Встановити лічильник $n = 0$.
4. Обчислити
$$Y^{(n)} = A_3\left(X^{(n)}\right)^2 + (k+1)\, A_2 X^{(n)} - m A_1.$$
5. Обчислити
$$\begin{pmatrix} X^{(n+1)} \\ Y^{(n+1)} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -kA_2 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} \circ X^{(n)} + \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ Y^{(n)} + \begin{pmatrix} (m+1)A_1 & 0 \\ (k+1)A_2 & -E \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} -A_0 \\ mA_1 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$
6. Оскільки за виконання умови (13) описаний ітераційний процес є збіжним, то достатньо перевірити правильність нерівності
$$\left\| X^{(n+1)} - X^{(n)} \right\| \leq \varepsilon. \qquad (15)$$
Якщо умова (15) не виконується, то потрібно встановити лічильник $n = n + 1$ і перейти на крок 4, інакше повернути наближений розв'язок $X^{(n+1)}$.

5. Обчислювальні експерименти

Для підтвердження ефективності ітераційного процесу (14), описану вище схему реалізували у середовищі FreeMat. Наведемо результати обчислення для випадку тестових матричних рівнянь.

Таблиця 1

Розв'язування матричного рівняння (16)

ε	Кількість ітерацій, n	Наближений розв'язок, X_n	Норма похибки
0.1	13	$\begin{pmatrix} -13.3126 & -11.2182 \\ 14.9908 & 12.6425 \end{pmatrix}$	0.1876
0.01	15	$\begin{pmatrix} -13.3033 & -11.2104 \\ 14.9819 & 12.6351 \end{pmatrix}$	0.0246
0.001	18	$\begin{pmatrix} -13.3015 & -11.2089 \\ 14.9801 & 12.6336 \end{pmatrix}$	0.0017
0.0001	22	$\begin{pmatrix} -13.3016 & -11.2090 \\ 14.9802 & 12.6337 \end{pmatrix}$	0.0001

Приклад 1. *Розглянемо поліноміальне матричне рівняння*
$$A_3 X^3 + A_2 X^2 + A_1 X + A_0 = 0, \qquad (16)$$

де

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_0 = \begin{pmatrix} -14 & -12 \\ -17 & -14 \end{pmatrix}.$$

Приймемо $k = 1, m = 1$, *а початкове наближення* –

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результати застосування ітераційниого процесу (14) наведені у табл. 1.

Таблиця 2

Розв'язування матричного рівняння (17)

ε	Кількість ітерацій, n	Наближений розв'язок, X_n	Норма похибки
0.1	31	$\begin{pmatrix} -0.1388 & 0.8741 & 0.3325 \\ 0.7509 & -0.1798 & 0.9178 \\ 0.4568 & 0.2874 & -0.3356 \end{pmatrix}$	0.2620
0.01	47	$\begin{pmatrix} -0.1514 & 0.8839 & 0.3359 \\ 0.7535 & -0.1945 & 0.9412 \\ 0.4680 & 0.2923 & -0.3642 \end{pmatrix}$	0.0257
0.001	63	$\begin{pmatrix} -0.1500 & 0.8821 & 0.3368 \\ 0.7535 & -0.1931 & 0.9384 \\ 0.4664 & 0.2927 & -0.3622 \end{pmatrix}$	0.0039
0.0001	83	$\begin{pmatrix} -0.1501 & 0.8823 & 0.3366 \\ 0.7535 & -0.1932 & 0.9387 \\ 0.4666 & 0.2925 & -0.3622 \end{pmatrix}$	0.0004

Приклад 2. *Нехай маємо поліноміальне матричне рівняння*

$$A_3X^3 + A_2X^2 + A_1X + A_0 = 0, \tag{17}$$

де

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_0 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -5 \\ -2 & -7 & -3 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приймемо $k = 1, m = 1$, *а початкове наближення* –

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результати застосування ітераційного процесу (14) подані у табл. 2.

Результати наведені у таблицях 1 та 2 свідчать про збіжність ітераційного процесу та про ефективність запропонованої схеми.

6. Висновки

Розглянуто поліноміальне матричне рівняння третього степеня. Запропоновано нову схему розв'язування таких рівнянь, отримано рекурентні співвідношення для знаходження розв'язків цього рівняння. Наведено достатні умови збіжності матричних ланцюгових дробів, які використовують в обчислювальній схемі. Проведено чисельні експерименти, які підтверджують ефективність запропонованої схеми.

Список використаної літератури

1. *Bartels R. H.* Solution of the matrix equation $AX + XB = C$ / R. H. Bartels, G. W. Stewart // Commun ACM. – 1972. – P. 820–826.
2. *Armstrong E. S.* ORACLE – a design system for linear multivariable control. – / E. S. Armstrong. – Marcel Dekker, – 1980.
3. *Недашковська А. М.* Ітераційний метод розв'язування системи поліноміальних рівнянь другого степеня // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2015. – Вип. 21. – С. 150–161.
4. *Боднар Д. И.* Разветвленные цепные дроби / Д. И. Боднар. – Київ: Наукова Думка, 1986. – 176 с.

Стаття: надійшла до редколегії 23.06.2019
доопрацьована 15.09.2019
прийнята до друку 18.09.2019

SCHEME OF SOLVING THE MATRIX EQUATION OF THE THIRD DEGREE

A. Nedashkovska

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: nastia.nedashkovska@gmail.com

Most applications reduced to solving systems of algebraic equations. Therefore, it is difficult to overestimate the role of methods for finding solutions for such systems in applied mathematics. The work of Bodnar D. I. examines a new iterative scheme for solving systems of second-degree polynomial equations by developing a solution in a chain matrix fraction. A similar approach applied in solving matrix equations that arose in many theoretical and applied disciplines. In particular, in problems of optimal control, stabilization of controlled linear systems and other. Despite the considerable development and widespread use of orthogonal methods, the problem of solving matrix equations is not comprehensive: finding at least one of the existing solutions of the matrix equation is a great success. This research proposes a scheme for solving a third-degree matrix polynomial equation. After some elementary transformations, the solution of this matrix equation reduced to the solution of a system of two matrix equations with two unknowns. Recurrence relations obtained to find approximate solutions of a given polynomial-nonlinear equation. The algorithm of their realization described. The paper presents sufficient conditions for the convergence of the method, conducted several numerical experiments to confirm the effectiveness of the proposed scheme.

Key words: iterative method, polynomial matrix equations, convergence, chain fractions.