УДК 517.5

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ЗА ДОПОМОГОЮ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ПІДВИЩЕНОГО ПОРЯДКУ

Г. Ярмола, А. Дудикевич

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000,
e-mail: *halyna.yarmola@lnu.edu.ua*, *annatdud@gmail.com*

Методом скінченних різниць у випадку задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца побудовано різницеву схему підвищеного порядку апроксимації. Для похідних першого та другого порядків використовують різницеві співвідношення четверого порядку. Додаючи граничні умови у вузлах сітки, отримуємо систему різницевих рівнянь (система лінійних алгебричних рівнянь) з матрицею, яка є симетричною і має діагональну перевагу. Тому цю систему доцільно розв'язувати ітераційними методами. Застосовано методи простих ітерацій і Зейделя, які за невелику кількість ітерацій дають наближений розв'язок із заданою точністю. Наведено результати чисельних експериментів, які підтверджують ефективність методу та теоретичний порядок збіжності. Також виконано порівняння ітераційних процесів за кількістю ітерацій і значеннями абсолютних похибок.

Ключові слова: задача Діріхле, рівняння Гельмгольца, метод скінченних різниць, система різницевих рівнянь, порядок апроксимації, метод простих ітерацій, метод Зейделя, збіжність.

1. Вступ

У випадку розв'язування граничних задач математичної фізики точні розв'язки відомі тільки у випадку простих областей. Тому ці задачі розв'язують наближено. Серед великої кількості чисельних методів універсальним і ефективним методом розв'язування граничних задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу є метод скінченних різниць [2]. Процес розв'язування таких задач складається з заміни диференціальної задачі системою різницевих рівнянь і розв'язування отриманої системи прямими або ітераційними методами.

Багато фізичних явищ – акустика, пружність та електромагнітні хвилі – описуються рівнянням Гельмгольца зі сталим або змінним хвильовим числом. Додавши граничні умови Діріхле, Неймана чи Робіна, отримують відповідні задачі. Базовою різницевою схемою для наближеного розв'язування таких задач є схема з порядком $O(h^2)$. Для отримання точнішого чисельного результату, розробили схеми вищих порядків апроксимації, зокрема четвертого та шостого [6–8]. Такі різницеві схеми застосовують і для розв'язування нелінійних граничних задач для рівняння Гельмгольца [5]. У згаданих працях проведено аналіз збіжності запропонованих схем та отримано оцінки похибок.

Нехай в області $\bar{G} = \{a \le x \le b, a \le y \le b\}$ розглянемо задачу Діріхле для рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K^2 u = f(x, y, u, u_x, u_y),\ (x, y) \in G, \tag{1}$$

$$u(x,y) = g(x,y),\ (x,y) \in \Gamma, \tag{2}$$

де $f(x,y,u,u_x,u_y)$ і $g(x,y)$ – задані функції; Γ – границя області $\bar{G}$. В області $\bar{G}$ на функцію f та її похідні накладаються такі вимоги:

1) f є неперервною;

2) $\dfrac{\partial f}{\partial u} \geq 0$;

3) $|\dfrac{\partial f}{\partial u_x}| \leq q_1$;

4) $|\dfrac{\partial f}{\partial u_y}| \leq q_2$,

де q_1 і q_2 – додатні константи. За таких припущень розв'язок задачі (1)-(2) існує та єдиний [5].

2. Різницева схема четвертого порядку

В області $\bar{G}$ побудуємо квадратну сітку з кроком $h = \dfrac{b-a}{N+1}$, N – кількість внутрішніх точок за осями OX чи OY. На множині вузлів (x_i, y_j), де $x_i = a + ih$, $y_j = a + jh$, $i,j = 0,1,\ldots,N+1$, використовуємо дев'ятиточковий шаблон типу "ящик". Одержимо різницеву задачу вигляду

$$u_{xxi,j} + u_{yyi,j} + K^2 u_{i,j} = f(x_i, y_j, u_{i,j}, u_{xi,j}, u_{yi,j}),$$

$$u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j) \quad \text{на множині граничних вузлів.}$$

Позначимо $f(x_i, y_j, u_{i,j}, u_{xi,j}, u_{yi,j})$ через $f_{i,j}$ і $g(x_i, y_j)$ через $g_{i,j}$. На дев'ятиточковому шаблоні, згідно з [5, 6], одержимо різницеву схему четвертого порядку апроксимації

$$\begin{gathered}\frac{2}{3}\big(u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}\big) + \frac{1}{6}\big(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} + \\ + u_{i+1,j-1}\big) + \big(-\frac{10}{3} + h^2K^2\big(1 - \frac{h^2K^2}{12}\big)\big)u_{i,j} = h^2\big(\frac{2}{3} - \frac{h^2K^2}{12}\big)f_{i,j} + \\ + \frac{h^2}{12}\big(f_{i+1,j} + f_{i,j+1} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1}\big) \quad \text{на множині внутрішніх вузлів,}\end{gathered} \tag{3}$$

$$u_{i,j} = g_{ij} \quad \text{на множині граничних вузлів.} \tag{4}$$

Формули (3) і (4) задають систему лінійних алгебричних рівнянь. Причому похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в точках (i,j), $(i \pm 1, j)$ та $(i, j \pm 1)$, згідно з [4, 5], апроксимуються такими різницевими співвідношеннями

$$\bar{u}_{xi,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h},$$

$$\bar{u}_{xi\pm1,j} = \frac{\pm 3u_{i\pm1,j} \mp 4u_{i,j} \pm u_{i\mp1,j}}{2h},$$

$$\bar{u}_{xi,j\pm1} = \frac{u_{i+1,j\pm1} - u_{i-1,j\pm1}}{2h},$$

$$\bar{u}_{xxi,j\pm1} = \frac{u_{i+1,j\pm1} - 2u_{i,j\pm1} + u_{i-1,j\pm1}}{h^2},$$

$$\bar{u}_{yi,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h},$$

$$\bar{u}_{yi\pm1,j} = \frac{\pm 3u_{i,j\pm1} \mp 4u_{i,j} \pm u_{i,j\mp1}}{2h},$$

$$\bar{u}_{yi\pm1,j} = \frac{u_{i\pm1,j+1} - u_{i\pm,j-1}}{2h},$$

$$\bar{u}_{yyi\pm1,j} = \frac{u_{i\pm1,j+1} - 2u_{i\pm1,j} + u_{i\pm1,j-1}}{h^2}.$$

Тут через $\bar{u}$ позначено наближені значення у вузлах сітки. Позначимо

$$\bar{\bar{f}}_{i,j} = f(x_i, y_j, u_{i,j}, \bar{\bar{u}}_{xi,j}, \bar{\bar{u}}_{yi,j}),$$

де, згідно з [5],

$$\bar{\bar{u}}_{xi,j} = \bar{u}_{xi,j} + a_1(\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i-1,j}) + a_2 h(\bar{u}_{yyi+1,j} - \bar{u}_{yyi-1,j}) + a_3 h(\bar{f}_{i+1,j} - \bar{f}_{i-1,j}),$$

$$\bar{\bar{u}}_{yi,j} = \bar{u}_{xi,j} + a_4(\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j-1}) + a_5 h(\bar{u}_{xxi,j+1} - \bar{u}_{xxi,j-1}) + a_6 h(\bar{f}_{i,j+1} - \bar{f}_{i,j-1}),$$

$$\bar{f}_{i\pm1,j} = f(x_{i\pm1}, y_j, u_{i\pm1,j}, \bar{u}_{xi\pm1,j}, \bar{u}_{yi\pm1,j}),$$

$$\bar{f}_{i,j\pm1} = f(x_i, y_{j\pm1}, u_{i,j\pm1}, \bar{u}_{xi,j\pm1}, \bar{u}_{yi,j\pm1}).$$

Коефіцієнти a_i, $i = 1, \ldots, 6$ визначаються за формулами

$$a_2 = a_5 = \frac{a_1}{h^2K^2} = \frac{a_4}{h^2K^2} = \frac{a_3}{-K^2} = \frac{a_6}{-K^2} = \frac{1}{16 - 2h^2K^2},$$

причому $h^2K^2 \neq 8$. Враховуючи позначення й обчислення наведені вище, різницеве рівняння набуде вигляду

$$\begin{gathered}\frac{2}{3}\big(u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}\big) + \frac{1}{6}\big(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} + \\ + u_{i+1,j-1}\big) + \Big(-\frac{10}{3} + h^2K^2\big(1 - \frac{h^2K^2}{12}\big)\Big)u_{i,j} = h^2\Big(\frac{2}{3} - \frac{h^2K^2}{12}\Big)\bar{\bar{f}}_{i,j} + \\ + \frac{h^2}{12}\big(\bar{f}_{i+1,j} + \bar{f}_{i,j+1} + \bar{f}_{i-1,j} + \bar{f}_{i,j-1}\big),\ i,j = 1,2,...N.\end{gathered} \tag{5}$$

3. Чисельний експеримент

В області $\bar{G} = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ розглянемо рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K^2 u = u + f(x,y),\ (x,y) \in G, \tag{6}$$

із відомим точним розв'язком

$$u_{\text{т}}(x,y) = e^{-Kx}\sin y,$$

де права частина

$$f(x,y) = 2(K^2 - 1)e^{-Kx}\sin y.$$

На границі Γ області $\bar{G}$ маємо такі умови

$$\begin{gathered} x \in [0,1]; y = 0; u_{\Gamma_1} = 0, \\ x = 1; y \in [0,1]; u_{\Gamma_2} = e^{-K}\sin(y), \\ x \in [0,1]; y = 1; u_{\Gamma_3} = e^{-Kx}\sin(1), \\ x = 0; y \in [0,1]; u_{\Gamma_4} = \sin(y). \end{gathered} \tag{7}$$

Для рівняння (6) різницеве рівняння (5) можна записати так:

$$\begin{gathered} \frac{2}{3}\big(u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}\big) + \\ + \frac{1}{6}\big(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1}\big) + \\ + \big(-\frac{10}{3} - h^2\big(\frac{2}{3} - \frac{h^2K^2}{12}\big) + h^2K^2\big(1 - \frac{h^2K^2}{12}\big)\big)u_{i,j} = \\ = h^2\big(\frac{2}{3} - \frac{h^2K^2}{12}\big)f_{i,j} + \frac{h^2}{12}\big(\tilde{f}_{i+1,j} + \tilde{f}_{i,j+1} + \tilde{f}_{i-1,j} + \tilde{f}_{i,j-1}\big),\ i,j = 1,2,...N \end{gathered} \tag{8}$$

з врахуванням умов на границі

$$\begin{gathered} u_{i,0} = 0,\ i = 0,\ldots,N+1, \\ u_{N+1,j} = e^{-K}\sin(hj),\ j = 0,\ldots,N+1, \\ u_{i,N+1} = e^{-Khi}\sin(1),\ i = 0,\ldots,N+1, \\ u_{0,j} = \sin(hj),\ j = 0,\ldots,N+1. \end{gathered} \tag{9}$$

Тут $\tilde{f}_{i,j} = u_{i,j} + f_{i,j}$. Оскільки в модельній задачі функція f не залежить від u, u_x і u_y, то $\bar{f}_{i,j} = f_{i,j}$ і $\bar{\bar{f}}_{i,j} = f_{i,j}$.

Метод простої ітерації, згідно з $[1,3]$, для різницевої задачі (8)-(9) запишемо у вигляді

$$\begin{gathered} u_{i,j}^{(n+1)} = \big[\frac{2}{3}(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)}) + \\ + \frac{1}{6}(u_{i+1,j+1}^{(n)} + u_{i-1,j+1}^{(n)} + u_{i-1,j-1}^{(n)} + u_{i+1,j-1}^{(n)}) - h^2(\frac{2}{3} - \frac{h^2K^2}{12})f_{i,j} - \\ - \frac{h^2}{12}(\tilde{f}_{i+1,j}^{(n)} + \tilde{f}_{i,j+1}^{(n)} + \tilde{f}_{i-1,j}^{(n)} + \tilde{f}_{i,j-1}^{(n)})\big] / \big[\frac{10}{3} + h^2(\frac{2}{3} - \frac{h^2K^2}{12}) - h^2K^2(1 - \frac{h^2K^2}{12})\big]. \end{gathered} \tag{10}$$

Метод Зейделя запишемо так:

$$\begin{gathered} u_{i,j}^{(n+1)} = \big[\frac{2}{3}(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)}) + \\ + \frac{1}{6}(u_{i+1,j+1}^{(n)} + u_{i-1,j+1}^{(n)} + u_{i-1,j-1}^{(n+1)} + u_{i+1,j-1}^{(n+1)}) - h^2(\frac{2}{3} - \frac{h^2K^2}{12})f_{i,j} - \\ - \frac{h^2}{12}(\tilde{f}_{i+1,j}^{(n)} + \tilde{f}_{i,j+1}^{(n)} + \tilde{f}_{i-1,j}^{(n+1)} + \tilde{f}_{i,j-1}^{(n+1)})\big] / \big[\frac{10}{3} + h^2(\frac{2}{3} - \frac{h^2K^2}{12}) - h^2K^2(1 - \frac{h^2K^2}{12})\big]. \end{gathered} \tag{11}$$

Таблиця 1

Значення наближеного розв'язку у вузлах сітки

$x\backslash y$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0	0.100	0.199	0.296	0.389	0.479	0.565	0.644	0.717	0.783	0.841
0.1	0	0.098	0.195	0.290	0.382	0.469	0.553	0.631	0.703	0.768	0.825
0.2	0	0.096	0.191	0.284	0.374	0.461	0.542	0.619	0.689	0.753	0.808
0.3	0	0.094	0.187	0.278	0.367	0.451	0.532	0.607	0.675	0.738	0.792
0.4	0	0.092	0.183	0.273	0.359	0.442	0.521	0.595	0.662	0.723	0.777
0.5	0	0.090	0.180	0.267	0.352	0.434	0.511	0.583	0.649	0.709	0.761
0.6	0	0.088	0.176	0.262	0.345	0.425	0.501	0.571	0.636	0.695	0.746
0.7	0	0.087	0.173	0.257	0.338	0.417	0.491	0.560	0.624	0.681	0.732
0.8	0	0.085	0.169	0.252	0.332	0.408	0.481	0.549	0.611	0.667	0.717
0.9	0	0.083	0.166	0.247	0.325	0.400	0.472	0.538	0.599	0.654	0.703
1	0	0.082	0.163	0.242	0.319	0.393	0.462	0.527	0.587	0.641	0.689

У таблиці подано наближений розв'язок задачі (6)–(7) для $K = 0.2$, знайдений методом простої ітерації. Результат отримано за 134 ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$. Абсолютна похибка становить 0.00015.

Для $K = 0.8$ наближений розв'язок отримано методом простих ітерацій (10) за 133 ітерації, а методом Зейделя (11) – за 80. Абсолютна похибка становить 0.00015 та 0.00008, відповідно.

4. Висновки

Побудовано алгоритм розв'язування задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца за допомогою різницевого методу підвищеного порядку апроксимації з застосуванням ітераційних методів для розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь, проведено чисельний експеримент. Одержані результати свідчать про достовірність побудованого алгоритму.

Список використаної літератури

1. *Дудикевич А. Т.* Чисельне розв'язування плоскої та осесиметричної задач Діріхле для рівняння Пуассона у випадку складних областей / А. Т. Дудикевич, Л. І. Підківка. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка. – 2001. – 101 с.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – Москва: Наука, 1983. – 616 с.
3. *Цегелик Г. Г.* Чисельні методи / Г.Г. Цегелик. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 408 с.
4. *Шахно С. М.* Практикум з чисельних методів / С. М. Шахно, А. Т. Дудикевич, С. М. Левицька. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 432 с.
5. *Pandey P. K.* A fourth order finite difference method for a nonlinear Helmholtz type boundary value problems in PDEs / P. K. Pandey // Matematychni Studii. – 2016. – Vol. 45, Is. 2. – P. 213–224.
6. *Singer I.* Sixth-order accurate finite difference schemes for the Helmholtz equation / I. Singer, E. Turkel // J. Comp. Acous. – 2006. – Vol. 14. – P. 339–352.

7. *Turkel E.* Compact 2D and 3D sixth order schemes for the Helmholtz equation with variable wave number / E. Turkel, D. Gordon, R. Gordon, S. Tsynkov // J. Comput. Phys. – 2013. – 232. – P. 272–287.
8. *Zhang Y.* Sixth-order finite difference scheme for the Helmholtz equation with inhomogeneous Robin boundary condition / Y. Zhang, K. Wang, R. Guo // Advances in Difference Equations. – 2019. – 362.

Стаття: надійшла до редколегії 19.11.2019
доопрацьована 20.11.2019
прийнята до друку 20.11.2019

NUMERICAL SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE HELMHOLTZ EQUATION BY HIGHER ORDER DIFFERENCE SCHEMES

H. Yarmola, A. Dudykevych

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine,
e-mail: halyna.yarmola@lnu.edu.ua, annatdud@gmail.com

Many physical processes are described by the Helmholtz equation. By adding the Dirichlet, Neumann, or Robin boundary conditions, the corresponding problems are obtained. An effective method for solving such boundary problems is the finite difference method. In this paper, we consider a Dirichlet problem for the Helmholtz equation. A finite difference approximate scheme of the higher-order was constructed. For first- and second-order derivatives the fourth-order finite difference approximations are used. By adding boundary conditions at the grid nodes, we obtain a system of difference equations (a system of linear algebraic equations) with a symmetric matrix that has a diagonal advantage. Therefore, it is advisable to solve this system by iterative methods. In the paper, the simple iterations method and Seidel method are used. They give an approximate solution with a given accuracy by a small number of iterations. A test problem with a constant wave number and a known exact solution is considered. The difference equation and the iterative formulas of the simple iterations method and Seidel method for this problem are given. The results of numerical experiments, which confirm the efficiency of the method and the theoretical order of convergence, are presented. The calculations are performed under different values of the wave number. Iterative processes are compared by the number of iterations and the values of absolute errors.

Key words: Dirichlet problem, Helmholtz equation, finite difference method, system of difference equations, order of approximation, simple iteration method, Seidel method, convergence