УДК 519.6

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН ІЗ НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ В ОБМЕЖЕННЯХ

О. Притоманова

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, пр. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010, e-mail: olgmp@ua.fm

Запропоновано підхід до розв'язання однієї неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множини Ω з n-вимірного евклідового простору E_n на підмножини $\Omega_1, ..., \Omega_N$ з відшукуванням координат центрів $\tau_1, ..., \tau_N$ цих підмножин із нечіткими параметрами в обмеженнях. Реальні ситуації, які описуються моделями оптимального розбиття множин, найчастіше характеризуються деяким ступенем невизначеності. У цих випадках якість прийнятих рішень в оптимізаційних задачах розбиття множин знаходять у прямій залежності від повноти урахування всіх невизначених чинників, істотних для наслідків прийнятих рішень.

Клас задач оптимального розбиття множин, який дає змогу враховувати фактори невизначеності, які мають не ймовірносно-статистичну природу, – це задачі оптимального розбиття множин, в яких або окремі параметри, що входять до опису моделі, є нечіткими, неточними, невизначеними, або є недостовірний математичний опис деяких залежностей в моделях (наприклад, функцій попиту або вартості транспортування одиниці продукції в нескінченновимірних транспортних задачах), або нечітко сформульовані самі критерії та (або) системи обмежень, або модель оптимізації допускає вплив зовнішніх неконтрольованих збурень різного роду та ін.

Алгоритм розв'язання задачі розроблено на підставі синтезу методів розв'язання задач теорії оптимального розбиття множин з нейронечіткими технологіями та модифікаціями r-алгоритму Н. З. Шора для розв'язку негладких задач оптимізації. Наведено результати для модельної задачі оптимального розбиття множини Ω на три підмножини з нечіткими параметрами в обмеженнях, які отримали за допомогою розробленого підходу. Провели порівняння результатів розв'язання задачі з чіткими параметрами та результатів для випадку, коли деякі параметри розв'язуваної задачі неточні, нечіткі або їхній математичний опис недостовірний.

Ключові слова: задача оптимального розбиття множин, негладкі оптимізаційні задачі, нечіткі параметри, r-алгоритм Н. З. Шора, нейронечіткі технології.

1. Вступ

Математична теорія оптимального розбиття множин (ОРМ) n-вимірного евклідового простору є напрямом сучасної теорії оптимізації, тобто, новим розділом некласичного нескінченновимірного математичного програмування.

В теорії неперервних задач ОРМ до теперішнього часу сформувалися напрями, обумовлені різними типами математичних формулювань задач розбиття та різними сферами її застосувань [1]. Прикладами застосування результатів цієї теорії для розв'язання деяких практичних задач оптимізації, що зводяться до нескінченновимірних моделей ОРМ n-вимірного евклідового простору є розв'язання так званих задач розміщення розбиття (location-allocation) [2], задач кульового покриття [3], задач побудови діаграм Вороного і різних їхніх узагальнень [4] та багато інших.

Найменш розвинені на сьогодні задачі оптимального розбиття множин в умовах невизначеності, зокрема задачі, в яких ряд параметрів нечіткі, неточні, або недостовірний математичний опис деяких залежностей в моделі. Такі моделі зачисляють до нечітких задач ОРМ [5].

Мета цієї праці розглянути неперервну задачу оптимального розбиття множин із нечіткими параметрами в обмеженнях і запропонувати алгоритм її розв'язання, заснований на застосуванні нейронечітких технологій [6] та r-алгоритму Н. З. Шора [7].

2. Формулювання задачі

Розглянемо одну практичну виробничо-транспортну задачу оптимального розміщення підприємств з обмеженими обсягами виробництва в умовах невизначеності. Нехай споживач деякої однорідної продукції рівномірно розподілений в області $\Omega \subset E_2$. Скінченна кількість N виробників цієї продукції розташовані в ізольованих точках $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$, $i = 1, ..., N$, області Ω. Вважають заданими: $\rho(x)$ – попит на продукцію споживача з координатами $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$; $c(x, \tau_i)$ – вартість транспортування одиниці продукції від виробника $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ споживачеві з координатами $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$. Передбачено, що прибуток виробника залежить тільки від його витрат, які є сумою виробничих і транспортних витрат.

Для кожного i-го виробника задана функція $\varphi_i(Y_i)$, що описує залежність вартості виробництва від його потужності Y_i, яку визначають за формулою $Y_i = \int_{\Omega_i} \rho(x)dx$, і наведені капітальні витрати на реконструкцію і-го виробника для збільшення його потужності від існуючої до проектної Y_i.

Множину споживачів Ω можна розбивати на зони обслуговування Ω_i споживачів i-м виробником так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, mes\,(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \ i \neq j, \ i, j = 1, ..., N, \tag{1}$$

де $mes(\cdot)$ – міра Лебега, $\tau = (\tau_1, ..., \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times ... \times \Omega}_{N} = \Omega^N$.

У цьому випадку потужність i-го виробника визначається сумарним попитом споживачів, які належать Ω_i, і не перевищує заданих обсягів

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx \leq b_i, i = 1, ..., N, \tag{2}$$

не виключається, що деякі з підмножин Ω_i виявляться порожніми.

Треба розбити множину споживачів Ω на зони обслуговування їх N виробниками, тобто на підмножини Ω_i, $i = 1, ..., N$, розмістити цих виробників в Ω так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції і доставку її до споживачів

$$\sum_{i=1}^{N} \left\{ \int_{\Omega_i} c(x, \ \tau_i)\rho(x)dx + \varphi_i \left(\int_{\Omega_i} \rho(x)dx \right) \right\} \to \min_{(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1,..,\tau_N\})} \tag{3}$$

за умов (1), (2).

У [1] доведено, що (3) можна подати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (c(x, \ \tau_i) + a_i)\rho(x)dx \to \min_{(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1,..,\tau_N\})}. \tag{4}$$

Задача (1)–(4) нескінченновимірна задача location-allocation в умовах визначеності, якщо параметри $a_1, ...a_N$, $b_1, ..., b_N$ – задані невід'ємні числа.

Детальніше розглянемо параметри $b_1, ..., b_N$ у обмеженнях (2). Зрозуміло, що у багатьох практичних виробничо-транспортних задачах оптимального розміщення підприємств з обмеженнями виробництва величини цих параметрів залежать від багатьох чинників реального процесу, не врахованих у наведеній моделі.

Модель з фіксованими значеннями параметрів $b_1, ..., b_N$ може виявитися занадто "грубою", тому що на практиці відомими бувають не конкретні точні значення параметрів, а множини їхніх можливих значень.

Для зняття невизначеності у разі задавання параметрів $b_1, ..., b_N$ у співвідношенні (2) розглядатимемо їх як нечіткі змінні, які залежать від нечітких чинників $\beta_m,\ m = 1, ..., q$ у вигляді $b_i \equiv b_i(\beta_1, ..., \beta_q)$. Такими чинниками для обмежень обсягів виробництва можуть бути вартості засобів виробництва, вартості й обмеженість трудових, природних ресурсів та ін. Урахування подібної додаткової інформації ускладнює вихідну математичну модель, проте, вона може виявитися прийнятно більш точною та адекватною, тому що враховує вплив додаткових чинників на параметри $b_1, ..., b_N$.

Отож, неперервну задачу оптимального розбиття множини Ω з E_2 на її підмножини $\Omega_1, ..., \Omega_N$, що не перетинаються та серед яких можуть бути порожні, з відшуканням координат центрів цих підмножин і з нечіткими параметрами у обмеженнях можна записати у такому вигляді.

Задача 1. Знайти

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (c(x,\ \tau_i) + a_i)\rho(x)dx \to \min_{(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1,..,\tau_N\})} \tag{5}$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx \leq b_i(\beta_1, ..., \beta_q), i = 1, ..., N, \tag{6}$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, mes\,(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, ..., N. \tag{7}$$

Підхід до розв'язання сформульованої задачі з нечіткими параметрами в обмеженнях заснований на застосуванні математичного апарата теорії ОРМ і нейронечітких технологіях. Спочатку для зняття нечіткості в обмеженнях пропонуємо застосувати метод нейролінгвістичної ідентифікації складних нелінійних залежностей з [6], [8], а потім застосувати математичний та алгоритмічний апарати розв'язання задач ОРМ з [5].

3. Нейролінгвістична ідентифікація нечітких параметрів

Для спрощення опису методу нейролінгвістичної ідентифікації позначимо кожний параметр b_i, $i = 1, ..., N$ як b та розглянемо функціональну залежність виходу b від входів β_1, ..., β_q об'єкта ідентифікації у вигляді:

$$b = b(\beta_1, ..., \beta_q). \tag{8}$$

Для задачі ідентифікації передбачено відомі області визначення входів β_1, ..., β_q, область зміни виходу b для (8), а також експертно-експериментальну інформацію про залежність (8) у вигляді вибірки даних про входи та вихід об'єкта ідентифікації.

Завдання ідентифікації (відновлення) складної нелінійної залежності вигляду (8) розглядають як побудову моделі об'єкта за експертно-експериментальними даними про взаємозв'язки <входи> – <вихід> та розв'язують, зазвичай, в два етапи [6]:

– структурна ідентифікація: формування нечіткої бази знань про об'єкт і побудова на її підставі нечіткої моделі об'єкта з кількома входами і одним виходом, яка грубо відтворює залежність виходу від входів за допомогою лінгвістичних правил "ЯКЩО-ТО", що генеруються з експериментальних даних;
– параметрична ідентифікація (настройка): пошук таких параметрів нечіткої моделі, які мінімізують відхилення модельних значень від експериментальних.

Перший етап методу нейролінгвістичної ідентифікації (структурна ідентифікація) – побудова нечіткої моделі об'єкта з кількома входами й одним виходом складається з таких блоків: фазифікація, нечітке логічне виведення, дефазифікація.

У блоці фазифікації для знахождения залежності (8) у явному вигляді будемо розглядати вхідні змінні β_m, $m = 1, \ldots, q$, та вихідну змінну b як лінгвістичні змінні, для оцінки яких використовуватимемо терми з таких терм-множин [6]:

$D = \{D_k\}$ – терм-множина змінної b, де D_k – k-й лінгвістичний терм змінної b, $k = 1, 2, \ldots, L$, L – кількість різних класів виходу b; для кожного класу D_k задамо его центр $d_k \in D_k$;

$\mathrm{B}_m = \{\mathrm{B}_{mr}\}$ – терм-множина змінної β_m, де B_{mr} – r-й лінгвістичний терм змінної β_m, $m = 1, 2, \ldots, q$; $r = 1, 2, \ldots, t$, t – кількість термів у терм-множині B_m лінгвістичної змінної β_m.

Значення лінгвістичних термів D_k і B_{mr} отримуємо на підставі експертно-лінгвістичної інформації про об'єкт, який моделюється. Кожен терм як нечітку множину задамо дзвоновою функцією належності у вигляді (11), наведеному нижче. Побудована нечітка база знань на підставі експертно-лінгвістичної інформації про об'єкт, що моделюється, складається з продукційних правил $p_j^k(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q)$ і використовується для виконання блоку нечіткого логічного виведення (k – номер класу виходу b, $k = 1, 2, \ldots, L$, j – номер правила у k-му класі, $j = 1, 2, \ldots, s_k$, s_k – кількість правил у k-му класі).

На підставі виконання блоку нечіткого логічного виведення отримаємо функцію належності $\mu_{D_k}(b)$ вихідної змінної b класу D_k для усіх $m = 1, 2, \ldots, q$, $j = 1, 2, \ldots, s_k$, $k = 1, 2, \ldots, L$, у вигляді

$$\mu_{D_k}(b) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p_j^k(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q), \text{ якщо } \sum_{j=1}^{s_k} p_j^k(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q) \le 1, \\ 1 \text{ інакше}, \end{cases} \tag{9}$$

$$p_j^k(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q) = w_j^k \prod_{m=1}^{q} \mu_{mj}^k(\beta_m), \tag{10}$$

$$\mu_{mj}^k(\beta_m) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\beta_m - v_{mj}^k}{e_{mj}^k}\right)^2}, \tag{11}$$

де у формулах (10), (11) w_j^k – вага j-го правила у k-му класі виходу; $\mu_{mj}^k(\beta_m)$ – дзвонова функція належності змінної β_m терму B_{mj} у k-му класі виходу b; v_{mj}^k – координата максимуму, e_{mj}^k – коефіцієнт концентрації цієї функції належності; $j = 1, 2, \ldots, s_k$, $k = 1, 2, \ldots, L$.

Для отримання точного (чіткого) значення вихідної змінної застосуємо у блоці дефазифікації дискретний аналог методу центру тяжіння [6]

$$b = \frac{\sum_{k=1}^{L} d_k \mu_{D_k}(b)}{\sum_{k=1}^{L} \mu_{D_k}(b)} . \tag{12}$$

Отож, ми побудували нечітку модель об'єкта (8) у вигляді співвідношень (9)–(12), яка, як уже зазначалося раніше, грубо описує шукану залежність (8).

На другому етапі методу нейролінгвістичної ідентифікації (параметрична ідентифікація, настройка) для оптимізації параметрів моделі (9)–(12) будемо застосовувати методику, розроблену в [8] з використанням r-алгоритму Н. З. Шора [7]. Розв'язавши цю задачу оптимізації, отримуємо такі значення w_j^{*k} – для ваг правил (10) і параметрів v_{mj}^{*k}, e_{mj}^{*k} функції належності (11), для яких відхилення експериментальних даних від модельних, отриманих після настройки нечіткої моделі об'єкта (8), досягає мінімального значення.

У співвідношеннях (9)–(12) $\mu_{D_k}(b)$, $p_j^k(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q)$, $\mu_{mj}^k(\beta_m)$ приймаємо їхнє значення, яке обчислюють за оптимальних значень параметрів w_j^{*k}, v_{mj}^{*k}, e_{mj}^{*k}, отриманих після настройки, проведеної із застосуванням r-алгоритму Н. З. Шора.

4. Алгоритм розв'язання задачі з нейролінгвістичною ідентифікацією нечітких параметрів b_i

Для розв'язання задачі 1 при кожному фіксованому $b_i, i = 1, ..., N$ введемо характеристичні функції підмножин Ω_i

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \Omega_i, \\ 0, x \in \Omega \backslash \Omega_i, \ i = 1, ..., \ N, \end{cases} \tag{13}$$

перепишемо задачу 1 у термінах характеристичних функцій у вигляді задачі 2.

Задача 2. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot),\tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau) \tag{14}$$

де

$$\Gamma_2 = \{\lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \ \ almost\ everywhere\ (a.e.)\ for\ x \in \Omega\ ;$$
$$\int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx \le b_i, \quad i = 1, ..., N\},$$
$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), ..., \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \ \ a.e.\ for\ x \in \Omega\ ,\ i = 1, ..., N,$$
$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1 \ \ a.e.\ for\ x \in \Omega\}, \tau = (\tau_1, ..., \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times ... \times \Omega}_{N} = \Omega^N,$$
$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} (c(x, \ \tau_i) + a_i) \rho\,(x)\, \lambda_i\,(x)\, dx.$$

Оптимальний розв'язок задачі 2 має такий вигляд для $i = 1, ..., N$ і майже всіх $x \in \Omega$ [5]

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, \ if\ c(x, \tau_{*i}) + a_i + \psi_i^* \le c(x, \tau_{*j}) + a_j + \psi_j^*, \\ \quad i \ne j\ a.e.\ for\ x \in \Omega,\ j = 1, ..., N,\ then\ x \in \Omega_{*i}, \\ 0\ in\ the\ other\ cases, \end{cases}$$

як $\tau_{*1},...,\ \tau_{*N},\ \psi_1^*,...,\ \psi_N^*$ обирають оптимальний розв'язок задачі

$$G(\psi)=\min_{\tau\in\Omega^N}G_1(\tau,\psi)=$$
$$\min_{\tau\in\Omega^N}\left\{\int_\Omega\min_{i=1,\ldots,N}[c(x,\tau_i)+a_i+\psi_i]\rho\,(x)\,dx-\sum_{i=1}^N\psi_ib_i\right\}\to\max \tag{15}$$

за умов

$$\psi_i\geq 0,\quad i=1,...,N. \tag{16}$$

Тут

$$G_1(\tau,\psi)=\int_\Omega\min_{i=1,\ldots,N}[c(x,\tau_i)+a_i+\psi_i]\rho(x)dx-\sum_{i=1}^N\psi_ib_i. \tag{17}$$

Для розв'язання скінченновимірної задачі (15)–(17) з недиференційовною функцією (17) застосуємо евристичний алгоритм псевдоградієнтів з розтягуванням простору в напрямі різниці двох послідовних градієнтів, близький до r-алгоритму Н. З. Шора [7].

Для цього від задачі (15), (16) перейдемо до задачі безумовної максимізації по ψ за допомогою введення в цільову функцію (17) негладкої штрафної функції множини $\{\psi_i\geq 0,\ i=1,...,N\}$. Знайти

$$\max_{\psi\in\ E_N}\min_{\tau\in\Omega^N}P(\tau,\psi),$$

$$P(\tau,\psi)=G_1(\tau,\psi)-S\sum_{i=1}^N\max(0,-\psi_i)$$

де S – досить велике додатне число (значно більше максимального з множників Лагранжа для функції (17)).

Визначимо i-ту, $i=1,...,N$, компоненту $2N$-вимірного вектора узагальненого псевдоградієнта

$$g_P(\tau,\psi)=\left(g_P^\tau(\tau,\psi),-g_P^\psi(\tau,\psi)\right)=\left(g_P^{\tau_1}(\tau,\psi),...,g_P^{\tau_N}(\tau,\psi),-g_P^{\psi_1}(\tau,\psi),...,-g_P^{\psi_N}(\tau,\psi)\right)$$

функції $P(\tau,\psi)$ в точці $(\tau,\psi)=(\tau_1,...,\tau_N,\psi_1,...,\psi_N)$ так:

$$g_P^{\psi_i}(\tau,\psi)=\int_\Omega\rho(x)\lambda_i(x)dx-b_i+S\max\left(0,\ sign(-\psi_i)\right),i=1,...,N, \tag{18}$$

$$g_P^{\tau_i}(\tau,\psi)=\int_\Omega\rho(x)g_c^{\tau_i}(\tau,x)\lambda_i(x)dx,\quad i=1,...,N. \tag{19}$$

Тут $g_P^{\tau_i}(\tau,x)$ – i-а компонента N-вимірного вектора узагальненого градієнта $g_P^\tau(\tau,x)$ функції $c(x,\tau_i)$ в точці $\tau=(\tau_1,...,\tau_i,...,\tau_N)$ при фіксованому x, яка набуває вигляду

$$g_c^{\tau_i}(x,\tau)=\begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x,\tau)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x,\tau)\end{pmatrix}.$$

У формулах (18), (19) $\lambda_i(x)$, $i = 1, ..., N$ визначається так:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, \; if \; c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \le c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j, \\ \quad i \ne j \; a.e. \; for \; x \in \Omega, j = 1, ..., N, \\ 0 \; in \; the \; other \; cases. \end{cases} \quad (20)$$

Опишемо алгоритм розв'язання задачі (5)–(7).

Алгоритм розв'язання задачі 2.

Крок 1. Область Ω укладаємо в n-вимірний паралелепіпед Π, сторони якого паралельні до осей декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \backslash \Omega$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутної сіткою і задаємо початкове наближення $(\tau, \psi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ у вузлах сітки за формулами (20) при $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$. Обчислюємо значення $g_P^{\psi}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$, $g_P^{\tau}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ у вузлах сітки за формулами (18) та (19) при $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$. У формулі (18) $b_i, i = 1, ..., N$ обчислені за формулами (9)–(12), де як b взято відповідні $b_i, i = 1, ..., N$. Обираємо початковий пробний крок $h_0 > 0$ r-алгоритму та знаходимо

$$\tau^{(1)} = P_{\Pi}\left(\tau^{(0)} - h_0 g_P^{\tau}\left(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}\right)\right),$$

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} - h_0 g_P^{\psi}\left(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}\right),$$

де P_{Π} – оператор проектування на Π.

Крок 2. Нехай на підставі обчислень після k, $k = 2, 3, ...,$ кроків алгоритму отримано певні значення $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$, у вузлах сітки.

Крок $(k+1)$-й:

1) обчислюємо значення $\lambda^{(k)}(x)$ у вузлах сітки за формулами (20) при $\tau = \tau^{(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$;

2) обчислюємо значення $g_P\left(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}\right)$ за формулами (18), (19) при $\tau = \tau^{(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ та $b_i, i = 1, ..., N$, які обчислені за формулами (9)–(12);

3) проводимо $(k+1)$-й крок алгоритму узагальнених псевдоградієнтів з розтягуванням простору, близького до r-алгоритму [5], коротка схема якого набуває вигляду

$$\tau^{(k+1)} = P_{\Pi}\left(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_P^{\tau}\right),$$

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_P^{\psi},$$

де B_{k+1}^{τ}, B_{k+1}^{ψ} – оператори відображення перетвореного простору в основний простір E_n, причому $B_0^{\tau} = I_N$, $B_0^{\psi} = I_N$ (I_N – одинична матриця); $\tilde{g}_P = B_{k+1}^{*} g_P(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$; h_k – кроковий множник, вибір якого відбувається з умови мінімуму різниці

$$\left[G_1(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_1(\tau^{(k)}, \psi^{(k-1)})\right]$$

у напрямі антипсевдоградієнта $-g(\tau, \psi)$ у перетвореному просторі;

4) якщо умова

$$\left\| \left(\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}\right) - \left(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}\right) \right\| \le \varepsilon, \; \varepsilon > 0 \quad (21)$$

не виконується, то переходимо до $(k+2)$-го кроку алгоритму, якщо виконується – то до п. 5;

5) вважаємо $\tau_* = \tau^{(l)}$, $\psi^* = \psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, де l – номер ітерації, на якій виконалася умова (21);

6) обчислюємо оптимальне значення цільового функціонала за формулою (17) при $\tau = \tau_*$, $\psi = \psi^*$ та $b_i, i = 1, ..., N$, які обчислені за формулами (9)–(12), і для контролю правильності розрахунків за формулою

$$I\left(\lambda_*(\cdot), \tau_*\right) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left[c(x, \tau_{*i}) + a_i\right] \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx. \tag{22}$$

Завершення роботи алгоритму.

Наведений алгоритм реалізовано для такої модельної задачі.

5. Модельна задача

Розглянемо задачу розміщення трьох підприємств, які виробляють продукцію одного виду, з обмеженими зверху обсягами виробництва. Наведемо вхідні дані. Область $\Omega = \left\{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in E_2 : 0 \le x^{(1)} \le 1; 0 \le x^{(2)} \le 1\right\}$. Вартість транспортування одиниці продукції з i-го, $i = \overline{1,3}$ підприємства до споживача $(x^{(1)}, x^{(2)})$ задається так:

$$c(x, \tau_i) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}.$$

Попит на продукцію $\rho(x^{(1)}, x(^{(2)}) \equiv 1 \ \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$. Задано такі параметри a_i: $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$.

У цьому випадку потужність i-го виробника визначається сумарним попитом споживачів, що належать Ω_i, і не перевищує заданих обсягів

$$\iint\limits_{\Omega_1} \rho(x) dx \le b_1, \iint\limits_{\Omega_2} \rho(x) dx \le b_2, \iint\limits_{\Omega_3} \rho(x) dx \le b_3. \tag{23}$$

Треба розбити множину споживачів Ω на їхні зони обслуговування Ω_i трьома підприємствами за умов (23) і розмістити ці підприємства в області Ω так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції і доставку її до споживача (5).

Зауважимо, що для розв'язання цієї модельної задачі з чіткими параметрами $b_1 = 0,6$, $b_2 = 0,2$, $b_3 = 0,2$ застосовували алгоритм з [5]. На підставі роботи алгоритму за 83 ітерацій отримано оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним підприємством, яке зображено на рис. 1, де суцільною лінією позначені границі підмножин Ω_i, а символами "$\bullet$" позначені оптимальні координати розташованих підприємств.

Для оптимального розбиття на рис. 1 оптимальні координати розташованих підприємств $\tau_1 = (0,6912;\ 0,5000)$, $\tau_2 = (0,2100;\ 0,2384)$, $\tau_3 = (0,2100;\ 0,7924)$; максимальне значення функціонала двоїстої задачі 0,2530; мінімальне значення функціонала прямої задачі 0,2530; обсяги виробництва (0,6000; 0,2000; 0,2000).

Однак реальні залежності параметрів $b_i, i = 1, 2, 3$ від чинників, які на них впливають, зазвичай складні, нелінійні або невідомі. Перейдемо до ілюстрації описаного у статті підходу до розв'язання цієї задачі у разі нечітких параметрів $b_i, i = 1, 2, 3$ в обмеженнях.

Після застосування методу нейролінгвістичної ідентифікації для відновлення (до настройки) параметрів $b_i, i = 1, 2, 3$, отримуємо такі їхні значення: $b_1 = 0,6474$, $b_2 = 0,2214$, $b_3 = 0,1843$.

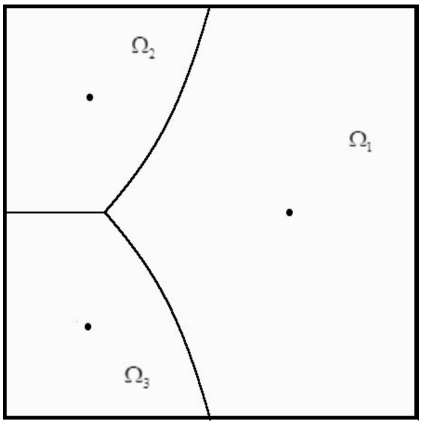

Рис. 1. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на три підмножини за наявності чітких параметрів у обмеженнях задачі

Далі, на підставі застосування описаного алгоритму розв'язання задачі 1 з цими відновленими значеннями параметрів $b_i, i = 1, 2, 3$, отримано за 74 ітерації оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним підприємством, яке зображено на рис. 2, де пунктирною лінією позначено границі підмножин Ω_i, а символами "■" позначені оптимальні координати розташованих підприємств.

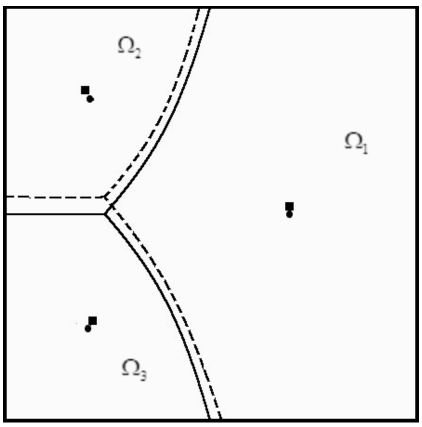

Рис. 2. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на три підмножини за наявності нечітких параметрів у обмеженнях (до та після настройки)

На рис. 2 для оптимального розбиття до настройки нечітких параметрів оптимальні координати розташованих підприємств

$$\tau_1 = (0,6883;\ 0,5000), \quad \tau_2 = (0,2055;\ 0,2234), \quad \tau_3 = (0,2124;\ 0,7816);$$

максимальне значення функціоналу двоїстої задачі 0,2524; мінімальне значення функціоналу прямої задачі 0,2537; обсяги виробництва (0,6011;0,2200;0,1789); після настройки нечітких параметрів оптимальні координати розташованих підприємств

$\tau_1 = (0,6911;\ 0,5000)$, $\tau_2 = (0,2101;\ 0,2384)$, $\tau_3 = (0,2101;\ 0,7925)$; максимальне значення функціоналу двоїстої задачі 0,2537; мінімальне значення функціоналу прямої задачі 0,2530; обсяги виробництва (0,6000;0,2001;0,1999).

Нарешті, після відновлення значень параметрів $b_i, i = 1,2,3$ за допомогою метода нейролінгвістичної ідентифікації та подальшого застосування описаного вище алгоритму до розв'язання задачі 1 з відновленими після настройки значеннями параметрів $b_1 = 0,6000$, $b_2 = 0,2000$, $b_3 = 0,2000$, за 76 ітерацій отримали такі самі результати (у межах заданої точності ϵ =0,0001), як і для випадку з чіткими параметрами. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на зони обслуговування кожним підприємством зображено на рис. 2, де суцільною лінією позначено границі підмножин Ω_i, а символами "•" – оптимальні координати розташованих підприємств.

6. Висновки

Порівнюючи числові та графічні результати розв'язання модельної задачі, отримані для чітких параметрів b_1, b_2, b_3 у обмеженнях (рис. 1) та для нечітких параметрів b_1, b_2, b_3, відновлених за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації після настройки (рис. 2), бачимо, що оптимальні розв'язки цих задач збігаються з заданим ступенем точності. Отож, можна зробити висновок, що запропонований підхід до розв'язання задачі оптимального розбиття множин із нечіткими параметрами в обмеженнях є обґрунтованим і дає достовірні результати.

Список використаної літератури

1. *Kiseleva E. M.* The Emergence and Formation of the Theory of Optimal Set Partitioning for Sets of the n-Dimensional Euclidean Space. Theory and Application / E. M. Kiseleva // Journal of Automation and Information Sciences. – 2018. – Vol. 50, Issue 9. – P. 1–24. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.10.
2. *Кісельова О. М.* Розв'язання однієї нескінченновимірної задачі location-allocation із нечіткими параметрами / О. М. Кісельова, О. М. Притоманова, С. В. Журавель, В. В. Шаравара // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Дніпро: Ліра, 2018. – С. 99–109.
3. *Киселева Е. М.* Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева, Л. И. Лозовская, Е. В. Тимошенко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 98–117.
4. *Kiseleva E. M.* Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing voronoi diagrams and their generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi diagrams based on the theory of optimal set partitioning / E. M. Kiseleva, L. S. Koriashkina // Cybernetics and Systems Analysis. – 2015. – Vol. 51, Issue 4. – P. 489–499. DOI: 10.1007/s10559-015-9740.
5. *Киселева Е. М.* Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография / Е. М. Киселева, Н. З. Шор. – Київ: Наукова думка, 2005. – 564 с.
6. *Kiseleva E. M.* Valuation of Startups Investment Attractiveness Based on Neuro-Fuzzy Technologies / E. M. Kiseleva, O. M. Prytomanova, S. V. Zhuravel // Journal of Automation and Information Sciences. – 2016. – Vol. 48, Issue 9. – P. 1–22. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i9.10.
7. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н. З. Шор. – Київ: Наук. думка, 1979. – 200 с.

8. *Kiseleva E. M.* Algorithm for Solving a Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional / E. M. Kiseleva, O. M. Prytomanova, S. V. Zhuravel // Journal of Automation and Information Sciences. – 2018. – Vol. 50, Issue 3. – P. 1–20. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i3.10.

Стаття: надійшла до редколегії 31.10.2019
доопрацьована 20.11.2019
прийнята до друку 20.11.2019

SOLVING THE OPTIMAL PARTITIONING SET PROBLEM WITH FUZZY PARAMETERS IN CONSTRAINTS

O. Prytomanova

*Oles Honchar Dnipro National University,
Gagarin Av., 72, Dnipro, 49010, e-mail: olgmp@ua.fm*

An approach is proposed to solve one continuous linear single-product problem of optimal partitioning of set Ω from n-dimensional Euclidean space E_n into subsets $\Omega_1, ..., \Omega_N$ by finding the coordinates of the centers $\tau_1, ..., \tau_N$ of these subsets with fuzzy parameters in constraints. Real situations, which are described by models of optimal partitioning of sets, are most often characterized by a certain degree of uncertainty. In these cases, the quality of the decisions made in the optimization partitioning set problems is directly dependent on the completeness of all the uncertain factors that are significant for the consequences of the decisions made.

The class of the optimal partitioning set problem which makes it possible to consider uncertainty factors of not probabilistic-statistical nature are the optimal partitioning set problems in which either certain parameters in the model description are fuzzy, inaccurate, underdetermined or there exists an invalid mathematical description of some dependencies in the models (for example, demand functions and the cost of transporting a unit of production in infinite dimensional transport problems) or the criteria themselves and (or) constraint systems are formulated inaccurately, or the optimization model admits the influence of external uncontrolled disturbances of different forms and etc.

The problem-solving algorithm was developed using a synthesis of methods for solving problems of the theory of optimal partitioning of sets with neuro-fuzzy technologies and modifications of N.Z.Shor's r-algorithm for solving non-smooth optimization problems.

The results are presented for the model problem of optimal partitioning of a set into three subsets with fuzzy parameters on constraints obtained by the developed approach. The results of the solution of the problem with the clear parameters are compared with the results when some parameters of the solved problem are fuzzy, unclear or their mathematical description is incorrect.

Key words: problem of optimal partitioning of sets, non-smooth optimization problems, fuzzy parameters, N. Z. Shor's r-algorithm, neuro-fuzzy technologies.