УДК 519.6

МЕТОД ГАУССА-НЬЮТОНА-ПОТРА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ЗА УЗАГАЛЬНЕНИХ УМОВ ЛІПШИЦЯ

С. Шахно, Ю. Шунькін, Г. Ярмола

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: stepan.shakhno@lnu.edu.ua, yuriy.shunkin@lnu.edu.ua, halyna.yarmola@lnu.edu.ua

Для розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати розглянуто метод Гаусса-Ньютона-Потра. Цей метод використовує замість матриці Якобі суму похідної від диференційовної частини оператора та комбінацію поділених різниць першого порядку від недиференційовної частини оператора. Обґрунтовано локальну збіжність методу за узагальнених умов Ліпшиця. Ці умови замість сталої Ліпшиця містять деяку додатну інтегровну функцію. З'ясовано порядок збіжності та проведено чисельні експерименти для порівняння отриманих результатів з іншими відомими методами.

Ключові слова: нелінійна задача про найменші квадрати, диференціально-різницевий метод, поділені різниці, швидкість збіжності, відхил, узагальнені умови Ліпшиця.

1. Вступ

Існує багато різних моделей фізичних процесів, які зводяться до нелінійних задач про найменші квадрати. Зазвичай вони виникають у випадках моделювання, або оцінки фізичних процесів на підставі значень, які отримали в результаті вимірювань, а також для побудови регресійних моделей.

Відомими методами розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати є метод Гаусса–Ньютона [1, 2, 9, 11, 12] та деякі його модифікації [1, 8, 9, 17]. Однак методи типу Гаусса-Ньютона використовують похідну від функції відхилу F. Оскільки таку функцію можемо отримати на підставі вимірювань, експерименту чи обчислення, то на практиці можна часто натрапити на проблему обчислення похідної від функції відхилу. В таких випадках можна застосувати ітераційно-різницеві методи, які не потребують обчислення матриці похідних, наприклад, методи типу хорд, типу Курчатова чи типу Потра [1, 8, 9, 17].

Інколи нелінійна функція складається з диференційовної та недиференційовної частин. Незважаючи на застосовність ітераційно-різницевих методів, важливо врахувати специфіку такої функції. Це дасть змогу ефективніше розв'язати задачу. Зокрема, можна використовувати комбіновані методи, які використовують суму похідної від диференційовної частини та поділеної різниці від недиференційовної частини функції. Методи, які використовують декомпозицію нелінійного оператора, добре зарекомендували себе для розв'язування нелінійних рівнянь. З такими методами можна ознайомитись у працях [5, 6, 9, 10, 15, 18].

2. Формулювання задачі

Розглянемо нелінійну задачу про найменші квадрати [4]

$$\min_{x\in\mathbb{R}^p} \frac{1}{2}(F(x)+G(x))^T(F(x)+G(x)), \tag{1}$$

де функція відхилу $F+G : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq p)$ нелінійна по x; F – неперервно диференційовна функція; G – неперервна функція, диференційовності якої загалом не потребується.

У працях [4, 7, 14] вивчали методи для розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати, які є комбінацією методу Гаусса-Ньютона та різницевих методів типу хорд і типу Курчатова.

У [16] для знаходження розв'язку задачі (1) запропоновано метод, який є комбінацією методу Гаусса-Ньютона [2] та методу типу Потра [17]

$$\begin{aligned} &x_{k+1} = x_k - (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T (F(x_k)+G(x_k)),\\ &A_k = F'(x_k) + G(x_k, x_{k-1}) + G(x_{k-2}, x_k) - G(x_{k-2}, x_{k-1}),\ k \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут $F'(x_k)$ – похідна Фреше від $F(x)$ в точці x_k; $G(x_k, x_{k-1})$, $G(x_{k-2}, x_k)$, $G(x_{k-2}, x_{k-1})$ – поділені різниці першого порядку функції $G(x)$ [3] в точках x_k, x_{k-1}, x_{k-2}; x_0, x_{-1}, x_{-2} – задані початкові наближення.

Зауважимо, що у випадку $m = p$ метод (2) буде збігатися з методом Ньютона-Потра для нелінійних рівнянь [6], який є комбінацією класичного методу Ньютона та методу Потра [13].

Ми проводимо дослідження методу (2) за більш широких, узагальнених умов Ліпшиця. Позначимо $\Omega(x^*, r) = \{x \in D : \|x - x^*\| < r\}$ відкриту кулю з центром в $x^* \in D$ і радіусом r.

3. Аналіз локальної збіжності методу (2)

Розглянемо декілька допоміжних лем, які будуть потрібні далі.

Лема 1. *Нехай $e(t) = \int_0^t E(u)du$, де E – інтегровна додатна неспадна функція на $[0,T]$. Тоді $e(t)$ – монотонно зростаюча по t на $(0,T]$.*

Лема 2. *[12, 20] Нехай $h(t) = \frac{1}{t}\int_0^t H(u)du$, де H – інтегровна додатна неспадна функція на $[0,T]$. Тоді $h(t)$ неспадна по t на $(0,T]$.*

Лема 3. *[19] Нехай $s(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t S(u)udu$, де S – інтегровна додатна функція на $[0,T]$. Тоді $s(t)$ – неспадна по t на $(0,T]$.*

Дослідження локальної збіжності та порядку збіжності ітераційного процесу (2) з використанням евклідової норми за узагальнених умов Ліпшиця [14] наведено в теоремі 4.

Теорема 4. *Нехай $F+G : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, $m \geq p$ – неперервна функція, причому F – диференційовна за Фреше, G – неперервна на підмножині $D \subseteq \mathbb{R}^p$. Припустимо, що задача (1) має розв'язок $x^* \in D$ та існує обернений оператор $(A_*^T A_*)^{-1}$, де $A_* = F'(x^*) + G(x^*, x^*)$ і $\|(A_*^T A_*)^{-1}\| \leq B$. Припустимо, що похідна Фреше $F'(x)$ задовольняє таку умову Ліпшиця в D:*

$$\|F'(x) - F'(x^\tau)\| \leq \int_{\tau\rho(x)}^{\rho(x)} L(u)du, \quad x^\tau = x^* + \tau(x - x^*), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \tag{3}$$

функція G має поділені різниці першого та другого порядку $G(\cdot,\cdot)$ та $G(\cdot,\cdot,\cdot)$, причому

$$\begin{gathered}\|G(x,y)-G(u,v)\| \le \int_0^{\|x-y\|+\|u-v\|} M(u)du,\\ \|G(u,x,y)-G(v,x,y)\| \le \int_0^{\|u-v\|} N(u)du,\end{gathered} \tag{4}$$

для всіх $x,y,u,v \in D$, $\rho(x) = \|x-x^*\|$; L, M і N – додатні неспадні функції на $[0;2R]$, $R>0$.

Більше того,

$$\|F(x^*)+G(x^*)\| \le \eta,\ \|F'(x^*)+G(x^*,x^*)\| \le \alpha;$$
$$\frac{B}{R}\left(\int_0^R L(u)du + 2\int_0^R M(u)du\right)\eta < 1$$

і $\Omega = \Omega(x^*, r_*) \subset D$, де r_* – єдиний додатний корінь рівняння $q(r) = 0$, де функція q задана рівністю

$$\begin{gathered}q(r) = B\Big[\big[\alpha + \int_0^r L(u)du + 2\int_0^r M(u)du + r\int_0^{2r} N(u)du\big]\times\\ \times\big[\int_0^r L(u)udu + 2\int_0^r M(u)du + 2r\int_0^{2r} N(u)du\big]+\\ +\frac{1}{r}\big[\int_0^r L(u)du + 2\int_0^r M(u)du + r\int_0^{2r} N(u)du\big]\eta\Big]+\\ +B\left[2\alpha + \int_0^r L(u)du + 2\int_0^r M(u)du + r\int_0^{2r} N(u)du\right]\times\\ \times\left[\int_0^r L(u)du + 2\int_0^r M(u)du + r\int_0^{2r} N(u)du\right] - 1.\end{gathered}$$

Тоді для $x_0, x_{-1}, x_{-2} \in \Omega$ ітераційний процес (2) коректно визначений, генерована ним послідовність $\{x_k\}$, $k = 1,2,\ldots$ належить Ω, збігається до розв'язку x^* і виконується оцінка

$$\begin{gathered}\|x_{k+1}-x^*\| \le C_1\|x_{k-1}-x^*\| + C_2\|x_k-x^*\|+\\ +C_3\|x_k-x^*\|^2 + C_4\|x_{k-2}-x^*\|\|x_{k-1}-x^*\|\|x_k-x^*\|,\end{gathered} \tag{5}$$

де

$$C_1 = g(r_*)\eta\int_0^{2r_*} N(u)du, \quad C_2 = \frac{g(r_*)\eta}{r_*}\Big(\int_0^{r_*} L(u)du + 2\int_0^{r_*} M(u)du\Big),$$
$$C_3 = \frac{g(r_*)T(r_*)}{r_*}\Big(\int_0^{r_*} L(u)du + 2\int_0^{r_*} M(u)du\Big) + \frac{2\alpha g(r_*)}{r_*}\int_0^{r_*} M(u)du,$$
$$C_4 = \frac{g(r_*)T(r_*)}{r_*}\int_0^{2r_*} N(u)du + \alpha g(r_*)\Big(\frac{1}{r_*^2}\int_0^{r_*} L(u)udu + \frac{2}{r_*}\int_0^{2r_*} N(u)du\Big),$$
$$g(r) = B\Big(1 - B\big[2\alpha + \int_0^r L(u)du + 2\int_0^r M(u)du + r\int_0^{2r} N(u)du\big]\times$$

$$\times\Big[\int_0^r L(u)du + 2\int_0^r M(u)du + r\int_0^{2r} N(u)du\Big]\Big)^{-1},$$
$$T(r) = \int_0^r L(u)udu + 2\int_0^r M(u)du + 2r\int_0^{2r} N(u)du.$$

Доведення. За правилом Лопіталя

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_0^r L(u)du = \lim_{r\to 0}\frac{L(r)}{1} = L(0),\quad \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_0^r M(u)du = \lim_{r\to 0}\frac{M(r)}{1} = M(0).$$

Врахувавши лему 1, для досить малого η, $q(0) = B(L(0)+2M(0))\eta - 1 < 0$. За досить великого R справджується нерівність $q(R) > 0$. Врахувавши теорему про середнє значення, функція q має додатний корінь на $(0, R)$, позначимо його r_*. Більше того, цей корінь єдиний на $(0, R)$.

Звідси, згідно з лемою 2, функція $(\frac{1}{r}\int_0^r L(u)du + \frac{1}{r}\int_0^r M(u)du)\eta$ неспадна по r на $(0, R]$. За лемою 1 функції $\int_0^r L(u)du$, $\int_0^r M(u)du$ і $\int_0^{2r} N(u)du$ монотонно зростаючі на $(0, R]$. Також за лемою 3 функція $\int_0^r L(u)udu = r^2(\frac{1}{r^2}\int_0^r L(u)udu)$ монотонно зростаюча по r на $(0, R]$. Отже, $q(r)$ монотонно зростаюча на $(0, R]$, а отже, її графік перетинає додатну r-вісь лише один раз на $(0, R]$.

Позначимо $A_k = F'(x_k) + G(x_k, x_{k-1}) + G(x_{k-2}, x_k) - G(x_{k-2}, x_{k-1})$. Нехай $k = 0$, тоді отримаємо таку нерівність

$$\begin{aligned}\|I - (A_*^TA_*)^{-1}A_0^TA_0\| &= \|(A_*^TA_*)^{-1}(A_*^TA_* - A_0^TA_0)\| = \\ = \|(A_*^TA_*)^{-1}(A_*^T(A_* - A_0) &+ (A_*^T - A_0^T)(A_0 - A_*) + (A_*^T - A_0^T)A_*)\| \le \\ \le \|(A_*^TA_*)^{-1}\|(\|A_*^T\|\|A_* - A_0\| &+ \|A_*^T - A_0^T\|\|A_0 - A_*\| + \|A_*^T - A_0^T\|\|A_*\|) \le \\ \le B(\alpha\|A_* - A_0\| &+ \|A_*^T - A_0^T\|\|A_0 - A_*\| + \alpha\|A_*^T - A_0^T\|).\end{aligned}\tag{6}$$

Врахувавши умови (3), (4), отримаємо

$$\begin{aligned}&\|A_0 - A_*\| = \|F'(x_0) + G(x_0, x_{-1}) + G(x_{-2}, x_0) - \\ &-G(x_{-2}, x_{-1}) - F'(x^*) - G(x^*, x^*)\| = \\ &= \|F'(x_0) - F'(x^*) - (G(x^*, x^*) - G(x_0, x^*) + (G(x_{-2}, x^*) - G(x_{-2}, x_0)) + \\ &+(G(x_0, x^*, x_{-1}) - G(x_{-2}, x^*, x_{-1}))(x^* - x_{-1}))\| \le \\ &\le \int_0^{\rho_0} L(u)du + 2\int_0^{\rho_0} M(u)du + \rho_{-1}\int_0^{\rho_{-2}+\rho_0} N(u)du,\end{aligned}\tag{7}$$

де $\rho_k = \rho(x_k)$. Тоді з нерівності (6), оцінки (7) та рівняння $q(r) = 0$, одержуємо

$$\begin{aligned}&\|I - (A_*^TA_*)^{-1}A_0^TA_0\| \le \\ &\le B[2\alpha + \int_0^{\rho_0} L(u)du + 2\int_0^{\rho_0} M(u)du + \rho_{-1}\int_0^{\rho_{-2}+\rho_0} N(u)du]\times \\ &\times[\int_0^{\rho_0} L(u)du + 2\int_0^{\rho_0} M(u)du + \rho_{-1}\int_0^{\rho_{-2}+\rho_0} N(u)du] \le \\ &\le B\left[2\alpha + \int_0^{r_*} L(u)du + 2\int_0^{r_*} M(u)du + r_*\int_0^{2r_*} N(u)du\right]\times \\ &\times\left[\int_0^{r_*} L(u)du + 2\int_0^{r_*} M(u)du + r_*\int_0^{2r_*} N(u)du\right] < 1.\end{aligned}\tag{8}$$

Далі за теоремою Банаха про обернений оператор [2] і (8), матимемо, що оператор $(A_0^TA_0)^{-1}$ існує і

$$\|(A_0^TA_0)^{-1}\| \le g_0 = B\Big(1 - B\big[2\alpha + \int_0^{\rho_0} L(u)du + 2\int_0^{\rho_0} M(u)du +$$
$$+\rho_{-1}\int_0^{\rho_{-2}+\rho_0} N(u)du\big]\times$$
$$\times\big[\int_0^{\rho_0} L(u)du + 2\int_0^{\rho_0} M(u)du + \rho_{-1}\int_0^{\rho_{-2}+\rho_0} N(u)du\big]\Big)^{-1} \le$$
$$\le g(r_*) = B\Big(1 - B\big[2\alpha + \int_0^{r_*} L(u)du + 2\int_0^{r_*} M(u)du + r_*\int_0^{2r_*} N(u)du\big]\times$$
$$\times\big[\int_0^{r_*} L(u)du + 2\int_0^{r_*} M(u)du + r_*\int_0^{2r_*} N(u)du\big]\Big)^{-1}.$$

Отже, ітерація x_1 коректно визначена. Далі запишемо

$$\|x_1 - x^*\| = \|x_0 - x^* - (A_0^TA_0)^{-1}(A_0^T(F(x_0) + G(x_0)) - A_*^T(F(x^*) + G(x^*)))\| \le$$
$$\le \| - (A_0^TA_0)^{-1}\|\| - A_0^T(A_0 - \int\limits_0^1 F'(x^* + t(x_0 - x^*))dt -$$
$$-G(x_0, x^*))(x_0 - x^*) + (A_0^T - A_*^T)(F(x^*) + G(x^*))\|.$$

З умов (3), (4) і нерівностей

$$\|A_0 - \int\limits_0^1 F'(x^* + t(x_0 - x^*))dt - G(x_0, x^*)\| =$$
$$= \|F'(x_0) - \int\limits_0^1 F'(x^* + t(x_0 - x^*))dt +$$
$$+G(x_0, x_{-1}) + G(x_{-2}, x_0) - G(x_{-2}, x_{-1}) - G(x_0, x^*)\| \le$$
$$\le \int_0^1 \int_{t\rho_0}^{\rho_0} L(u)dudt + \int_0^{\rho_0} M(u)du + (\rho_0 + \rho_{-1})\int_0^{\rho_0+\rho_{-2}} N(u)du =$$
$$= \int_0^{\rho_0} L(u)udu + \int_0^{\rho_0} M(u)du + (\rho_0 + \rho_{-1})\int_0^{\rho_0+\rho_{-2}} N(u)du,$$

$$\|A_0\| \le \|A_* + A_0 - A_*\| \le \|A_*\| + \|A_0 - A_*\| \le$$
$$\le \alpha + \int_0^{\rho_0} L(u)du + 2\int_0^{\rho_0} M(u)du + \rho_{-1}\int_0^{\rho_{-2}+\rho_0} N(u)du$$

отримаємо

$$\|x_1 - x^*\| \le g_0\Big[\big[\alpha + \int_0^{\rho_0} L(u)du + 2\int_0^{\rho_0} M(u)du + \rho_{-1}\int_0^{\rho_{-2}+\rho_0} N(u)du\big]\times$$
$$\times\big[\int_0^{\rho_0} L(u)udu + 2\int_0^{\rho_0} M(u)du + (\rho_0 + \rho_{-1})\int_0^{\rho_0+\rho_{-2}} N(u)du\big]\|x_0 - x^*\| +$$

$$+\eta\Big[\int_0^{\rho_0}L(u)du+2\int_0^{\rho_0}M(u)du+\rho_{-1}\int_0^{\rho_{-2}+\rho_0}N(u)du\Big]\Big]\le$$
$$\le g(r_*)\Big[\big[\alpha+\int_0^{r_*}L(u)du+2\int_0^{r_*}M(u)du+r_*\int_0^{2r_*}N(u)du\big]\times$$
$$\times\big[\int_0^{r_*}L(u)udu+2\int_0^{r_*}M(u)du+2r_*\int_0^{2r_*}N(u)du\big]+$$
$$+\frac{1}{r_*}\big[\int_0^{r_*}L(u)du+2\int_0^{r_*}M(u)du+r_*\int_0^{2r_*}N(u)du\big]\eta\Big]r_*.$$

Припустимо, що $x_k\in\Omega$ для $k\ge 0$ і виконується оцінка (5). Доведемо, що $x_{k+1}\in\Omega$ і справджується оцінка (5).

Згідно з (3) і (4), визначимо

$$\|I-(A_*^TA_*)^{-1}A_k^TA_k\|\le$$
$$\le B[2\alpha+\int_0^{\rho_k}L(u)du+2\int_0^{\rho_k}M(u)du+\rho_{k-1}\int_0^{\rho_{k-2}+\rho_k}N(u)du]\times$$
$$\times[\int_0^{\rho_k}L(u)du+2\int_0^{\rho_k}M(u)du+\rho_{k-1}\int_0^{\rho_{k-2}+\rho_k}N(u)du]\le$$
$$\le B\left[2\alpha+\int_0^{r_*}L(u)du+2\int_0^{r_*}M(u)du+r_*\int_0^{2r_*}N(u)du\right]\times$$
$$\times\left[\int_0^{r_*}L(u)du+2\int_0^{r_*}M(u)du+r_*\int_0^{2r_*}N(u)du\right]<1.$$

Отже, $(A_k^TA_k)^{-1}$ існує і

$$\|(A_k^TA_k)^{-1}\|\le g_k=B\Big(1-B\big[2\alpha+\int_0^{\rho_k}L(u)du+$$
$$+2\int_0^{\rho_k}M(u)du+\rho_{k-1}\int_0^{\rho_{k-2}+\rho_k}N(u)du\big]\times$$
$$\times\big[\int_0^{\rho_k}L(u)du+2\int_0^{\rho_k}M(u)du+\rho_{k-1}\int_0^{\rho_{k-2}+\rho_k}N(u)du\big]\Big)^{-1}\le g(r_*).$$

Звідси

$$\|x_{k+1}-x^*\|\le g_k\Big[\big[\alpha+\int_0^{\rho_k}L(u)du+2\int_0^{\rho_k}M(u)du+\rho_{k-1}\int_0^{\rho_{k-2}+\rho_k}N(u)du\big]\times$$
$$\times\big[\int_0^{\rho_k}L(u)udu+2\int_0^{\rho_k}M(u)du+(\rho_k+\rho_{k-1})\int_0^{\rho_k+\rho_{k-2}}N(u)du\big]\|x_k-x^*\|+$$
$$+\eta\big[\int_0^{\rho_k}L(u)du+2\int_0^{\rho_k}M(u)du+\rho_{k-1}\int_0^{\rho_{k-2}+\rho_k}N(u)du\big]\Big]\le$$
$$\le g(r_*)\Big[\big[\alpha+\int_0^{r_*}L(u)du+2\int_0^{r_*}M(u)du+r_*\int_0^{2r_*}N(u)du\big]\times$$
$$\times\big[\int_0^{r_*}L(u)udu+2\int_0^{r_*}M(u)du+2r_*\int_0^{2r_*}N(u)du\big]+$$
$$+\frac{1}{r_*}\big[\int_0^{r_*}L(u)du+2\int_0^{r_*}M(u)du+r_*\int_0^{2r_*}N(u)du\big]\eta\Big]r_*.$$

і $x_{k+1} \in \Omega$.

Тому ітераційний процес (2) коректно визначений, $x_{k+1} \in \Omega$ для $k \geq 0$ і справджується оцінка (5) для всіх $k \geq 0$.

Залишилось довести, що $x_k \to x^*$ при $k \to \infty$. Визначимо функції a, b на $[0, r_*]$

$$\begin{aligned} a(r) &= C_2 + C_3 r + C_4 r^2, \\ b(r) &= C_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Згідно з вибором r_*, отримаємо

$$a(r_*) \geq 0,\ b(r_*) \geq 0,\ a(r_*) + b(r_*) = 1. \tag{10}$$

Використовуючи оцінку (5), означення функцій a, b і сталих C_i $(i = 1, \ldots, 4)$, одержимо

$$\begin{gathered} \|x_{k+1} - x^*\| \leq C_1 \|x_{k-1} - x^*\| + C_2 \|x_k - x^*\| + \\ + C_3 \|x_k - x^*\|^2 + C_4 \|x_{k-2} - x^*\| \|x_{k-1} - x^*\| \|x_k - x^*\| \leq \\ \leq a(r_*) \|x_k - x^*\| + b(r_*) \|x_{k-1} - x^*\|. \end{gathered} \tag{11}$$

Як доведено в [9], за умов (9)–(11), послідовність $\{x_k\}$ збігається до x^* при $k \to \infty$. □

Наслідок 5. *Порядок збіжності ітераційного процесу* (2) *у випадку нульового відхилу становить 1,839...*

Справді, якщо $\eta = 0$, то $C_1 = C_2 = 0$ і

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C_3 \|x_k - x^*\|^2 + C_4 \|x_{k-2} - x^*\| \|x_{k-1} - x^*\| \|x_k - x^*\| \tag{12}$$

З нерівності (12) випливає, що існує константа C і натуральне число N такі, що

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_{k-2} - x^*\| \|x_{k-1} - x^*\| \|x_k - x^*\|,\ k \geq N,$$

звідки отримуємо рівняння для визначення порядку збіжності $t^3 - t^2 - t - 1 = 0$. Додатним коренем цього рівняння є $t^* = 1,839...$, порядок збіжності методу (2).

4. Чисельні експерименти

Ми порівняли швидкості збіжності методу (2) і методів *типу Потра* [17]

$$\begin{aligned} & x_{k+1} = x_k - (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T (F(x_k) + G(x_k)),\ k = 0, 1, 2, ..., \\ & A_k = F(x_k, x_{k-1}) + F(x_{k-2}, x_k) - F(x_{k-2}, x_{k-1}) + \\ & + G(x_k, x_{k-1}) + G(x_{k-2}, x_k) - G(x_{k-2}, x_{k-1}), k = 0, 1, 2, ... \end{aligned} \tag{13}$$

і *типу хорд* [17]

$$\begin{aligned} & x_{k+1} = x_k - (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T (F(x_k) + G(x_k)), \\ & A_k = F(x_k, x_{k-1}) + G(x_k, x_{k-1}), k = 0, 1, 2, ... \end{aligned} \tag{14}$$

Позначимо $f(x) = \dfrac{1}{2}(F(x) + G(x))^T (F(x) + G(x))$. Тестування проводили на нелінійних задачах з нульовим і ненульовим відхилами.

Таблиця 1

Кількість ітерацій, за які отримано розв'язок

Приклад	(x_0, y_0)	**Метод**		
		(2)	(13)	(14)
1	$(1, 0.5)$	5	5	6
	$(5, 2.5)$	11	14	15
	$(10, 5)$	14	19	19
2	$(0.6, 0.4)$	14	14	18
	$(3, 2)$	19	21	26
	$(6, 4)$	21	25	30

Приклад 1. *[4]*

$$F_1(x, y) = 3x^2y + y^2 - 1 + |x - 1|,$$
$$F_2(x, y) = x^4 + xy^3 + |y|,$$
$$z^* = (x^*, y^*) \approx (0.89465537, 0.32782652),\ f(z^*) = 0.$$

Приклад 2. *[4]*

$$F_1(x, y) = 3x^2y + y^2 - 1 + |x - 1|,$$
$$F_2(x, y) = x^4 + xy^3 + |y|,$$
$$F_3(x, y) = |x^2 - y|,$$
$$z^* = (x^*, y^*) \approx (0.74862800, 0.43039151),\ f(z^*) \approx 4.0469349 \cdot 10^{-2}.$$

Результати шукали з точністю $\varepsilon = 10^{-8}$

$$||x_{k+1} - x_k|| \leq \varepsilon.$$

Додаткові точки початкового наближення обчислювали за формулами

$$(x_{-1}, y_{-1}) = (x_0 - 10^{-4}, y_0 - 10^{-4}),$$
$$(x_{-2}, y_{-2}) = (x_0 - 2 \cdot 10^{-4}, y_0 - 2 \cdot 10^{-4}).$$

5. Висновки

Досліджено локальну збіжність методу Гаусса-Ньютона-Потра для розв'язування нелінійних задач про найменші квадрати з декомпозицією оператора за узагальнених умов Ліпшиця. Визначено порядок і радіус збіжності цього методу. Отримані чисельні результати демонструють, що комбінований метод Гаусса-Ньютона-Потра (2) ефективніший, ніж ітераційно-різницеві методи.

Список використаної літератури

1. *Дэннис Дж.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р. Шнабель. – Москва: Мир, 1988. – 440 с.

2. *Ортега Дж.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – Москва: Мир, 1975. – 558 с.
3. *Ульм С.* Об обобщенных разделенных разностях / С. Ульм // Известия АН ЭССР. Физика. Математика. – 1967. – Т. 16. – С. 13–26.
4. *Шахно С.* Про комбінований метод для розв'язування нелінійних задач про найменші квадрати / С. Шахно, Ю. Шунькін //Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2017. – Вип. 25. – С. 38–48.
5. *Шахно С. М.* Двоточковий метод для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором / С. М. Шахно, Г. П. Ярмола // Математичні Студії. – 2011. – Т. 36. – С. 213–220.
6. *Шахно С. М.* Комбінований метод Ньютона-Потра для розв'язування нелінійних операторних рівнянь / С. М. Шахно, В. І. Баб'як, Г. П. Ярмола // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – № 3 (120). – С. 170–178.
7. *Шахно С. М.* Метод Ґаусса–Ньютона–Курчатова для розв'язування нелінійних задач про найменші квадрати / С. М. Шахно // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – Т. 60, № 4. – С. 52–62.
8. *Argyros I. K.* A derivative free iterative method method for solving least squares problems / I. K. Argyros, H. Ren // Numerical Algorithms. – 2011. – Vol. 58, № 4. – P. 555–571.
9. *Argyros I. K.* Convergence and Applications of Newton-type Iterations / I. K. Argyros. – New-York: Springer-Verlag, 2008. – 506 p.
10. *Cătinas E.* On some iterative methods for solving nonlinear equations / E. Cătinas // Revue d'Analyse Numérique et de Theorie de l'Approximation. – 1994. – Vol. 23, № 1. – P. 47–53.
11. *Chen J.* Convergence of Gauss-Newton method's and uniqueness of the solution / J. Chen, W. Li // Appl. Math. Comp. – 2005. – Vol. 170. – P. 686–705.
12. *Li C.* Convergence and Uniqueness Properties of Gauss-Newton's Method problems / C. Li, W.-H. Zhang, X.-Q. Jin // Computers and Mathematics with Applications. – 2004. – Vol. 47. – P. 1057–1067.
13. *Potra F. A.* On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations / F. A. Potra // Numer. Funct.Anal. and Optimiz. – 1985. – P. 75–106.
14. *Shakhno S. M.* An iterative method for solving nonlinear least squares problems with nondifferentiable operator / S. M. Shakhno, R. P. Iakymchuk, H. P. Yarmola // Matematychni Studii. – 2017. – Vol. 48, № 1. – P. 97–107.
15. *Shakhno S. M.* Convergence of the two-step combined method and uniqueness of the solution of nonlinear operator equations / S. M. Shakhno // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2014. – Vol. 261. – P. 378–386.
16. *Shakhno S. M.* Gauss-Newton-Potra method for nonlinear least squares problems with decomposition of operator / S. M. Shakhno, Yu. V. Shunkin, H. P. Yarmola // XXXII International Conference PDMU-2018: Proceedings, Univerzita obrany. – 2018. – P. 153–159.
17. *Shakhno S. M.* On an iterative algorithm of order 1.839... for solving the nonlinear least squares problems / S. M. Shakhno, O. P. Gnatyshyn // Appl. Math. Comp. – 2005. – Vol. 161. – P. 253–264.
18. *Shakhno S. M.* On the two-step method for solving nonlinear equations with nondifferentiable operator / S. M. Shakhno, H. P. Yarmola // Proc. Appl. Math. Mech. – 2012. – Vol. 1. – P. 617–618.
19. *Wang X.* Convergence of Newton's method and uniqness of the solution of equations in Banach space / X. Wang // IMA J. Numer. Anal. – 2000. – Vol. 20. – P. 123–134.
20. *Wang X.* Convergence of Newton's method and uniqness of the solution of equations in Banach space II / X. Wang, C. Li // Acta Mathematica Sinica, English Series. – 2003. – Vol. 19. – P. 405–412.

Стаття: надійшла до редколегії 17.11.2019
доопрацьована 20.11.2019
прийнята до друку 20.11.2019

THE GAUSS-NEWTON-POTRA METHOD FOR NONLINEAR LEAST SQUARE PROBLEM UNDER GENERALIZED LIPSCHITZ CONDITIONS

S. Shakhno, Yu. Shunkin, H. Yarmola

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: stepan.shakhno@lnu.edu.ua,
yuriy.shunkin@lnu.edu.ua, halyna.yarmola@lnu.edu.ua*

There are a lot of different physical processes modeling of which lead us to a nonlinear least squares problems. Usually, they arise in cases of modeling or evaluating physical processes by values obtained as a result of measurements. In this article, we consider problems in which the nonlinear function consists of a differentiable and nondifferentiable part. For numerical solving such nonlinear least-squares problems, we proposed the Gauss-Newton-Potra method. Since the full Jacobian does not exist, this method uses instead of Jacobian the sum of the derivative of the differentiable part of the operator and the combination of first-order divided differences of the nondifferentiable part of the operator. The local convergence analysis of the method is conducted under the generalized Lipschitz conditions for first-order derivatives and first- and second-order divided differences. These conditions, instead of Lipschitz constant, contain some positive integrable function. The classical Lipschitz conditions are a partial case of the generalized Lipschitz conditions. An equation for the radius of convergence domain and error estimates were obtained. A convergence order of the method in case of zero residual was established. We carry out numerical experiments on a set of test problems and compare results with other known methods by the number of iterations. The obtained results show that the Gauss-Newton-Potra method is more efficient than iterative-difference methods.

Key words: nonlinear least-squares problem, differential-difference method, divided differences, convergence rate, residual, generalized Lipschitz conditions.