УДК 517.94:519.62

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ З ОЦІНКОЮ ГОЛОВНОГО ЧЛЕНА ЛОКАЛЬНОЇ ПОХИБКИ

Я. Пелех, І. Будз, А. Кунинець, Б. Філь

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12, Львів, e-mail: Pelekh_Ya_M@ukr.net

У зв'язку з розвитком сучасних напрямів науки та техніки виникла потреба обчислювати не тільки наближені розв'язки різних прикладних задач, а й гарантовані оцінки їхньої близькості до точних розв'язків. Тому інтерес до питань двосторонніх оцінок як до можливих засобів оцінки похиби останнім часом зростає.

Використання традиційних двосторонніх методів Рунге-Кутта різних порядків точності для чисельного розв'язання задачі Коші приводить до суттєвого збільшення обсягу обчислень, бо побудова верхніх і нижніх наближень до точного розв'язання потребує додаткових звертань (обчислень) до правої частини диференціального рівняння і, крім того, в цих методах немає оцінок головного члена локальної похибки.

Дробово-раціональні наближення отримали широке застосування в прикладній математиці, бо вони за відповідних умов дають високу швидкість збіжності, монотонні та двосторонні наближення, мають слабку чутливість до похибки округлення.

Виведено методи типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності для розв'язання початкової задачі для звичайних диференціальних рівнянь, які ґрунтуються на використанні ланцюгових дробів. Запропоновано також розрахункові формули третього порядку точності, які на кожному кроці інтегрування дають змогу без додаткових звертань до правої частини диференціального рівняння отримати не тільки верхні і нижні наближення до точного розв'язку, а також дають інформацію про величину головного члена локальної похибки. Для практичної оцінки похибки на кожному кроці інтегрування у випадку використання односторонніх формул типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності застосовують двосторонні обчислювальні формули третього порядку. Зауважимо, що у разі використання запропонованих розрахункових формул у кожному вузлі сітки будуть отримані кілька наближень до точного розв'язку, порівняння яких дає корисну інформацію, зокрема, щодо вибору кроку інтегрування або для оцінки точності результату.

Ключові слова: задача Коші, ланцюгові дроби, чисельні методи, нелінійні методи, двостороння апроксимація.

1. Вступ

Математичні моделі багатьох прикладних задач, зокрема для проектування радіоелектронних схем, автоматичних систем управління, розрахунку динаміки механічних систем, задачі багатовимірної оптимізації, кінетики, дослідження фізико-хімічних, біологічних та економічних процесів зводяться до розв'язання нелінійних систем диференціальних рівнянь. Оскільки точні розв'язки таких задач можна знайти в дуже часткових випадках, то треба використовувати наближені методи, причому з гарантованою оцінкою локальної похибки.

Використання традиційних двосторонніх методів Рунге-Кутта [1, c. 528-534], [3], [4], [6, c. 109-112], [7, c. 57-72], [8, c. 262-270], [14] приводить до суттєвого збільшення обсягу обчислень, оскільки побудова верхніх і нижніх наближень потребує додаткових звертань до правої частини диференціального рівняння і, крім того, в цих методах немає оцінки головного члена локальної похибки.

Ефективний спосіб побудови таких наближень – ланцюгові (неперервні) дроби. Ланцюгові дроби можна розглядати як один із способів знаходження апроксимацій Паде. За відповідних умов, використання неперервних дробів дає високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні та монотонні наближення [2, 5, 11, 15]. За допомогою неперервних дробів можна наближено обчислювати значення багатьох функцій, для яких їхні степеневі ряди збігаються дуже повільно, або розбіжні. Апарат неперервних дробів є одним з основних способів отримання дробово-раціональних наближень функції. В багатьох випадках доцільно за допомогою загальновідомих способів переходити від дробово раціонального наближення до відповідного ланцюгового дробу, для обчислення якого треба виконати меншу кількість арифметичних операцій, ніж для обчислення дробово-раціонального наближення. Процес обчислення неперервних дробів циклічний і легко програмується на ПК.

У працях [17, 19, 20], використовуючи різні апроксиманти Паде, досліджуються конкретні прикладні задачі. В [22] побудовано неявні чисельні методи другого порядку точності з мінімальною похибкою дискретизації і їх застосовано для аналізу динамічних систем, а в [21] побудовано двосторонній алгоритм другого порядку точності, який ґрунтується на неперервних дробах. Побудова і застосування явних однокрокових методів для розв'язання жорстких систем подано в працях [9, 10].

2. Побудова методу четвертого порядку точності

Розглядаємо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, x_0 + L], \tag{1}$$

де $y(x)$ – дійсний m-компонентний вектор; f – дійсна векторна функція залежної та незалежної змінних, причому припускається, що функція f володіє необхідною для викладок гладкістю, $L\,(L < \infty)$ – довжина проміжку, на якому потрібно знайти наближений розв'язок задачі Коші. Не обмежуючи загальності, будемо шукати наближений розв'язок задачі (1) у скалярному випадку, оскільки на системи рівнянь ця методика переноситься покомпонентно.

Використовуючи теорію побудови однокрокових методів [12, 13, 16, 18], наближений розв'язок задачі Коші (1) зобразимо у вигляді ланцюгового (неперервного) дробу [21]

$$y_{n+1}^{[k,l]} = y_n / D_n, \tag{2}$$

де

$$D_n = \sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \cfrac{d_{k,1}}{1 + \ddots + \cfrac{d_{k,l-1}}{1 + d_{k,l}}}}.$$

Вирази для $d_{k,l}$ у випадку $k + l = \overline{1,4}$ $(k = \overline{1,4};\ l = \overline{0,3})$ набувають вигляду

$$d_{0,0} = 1,\ d_{i,0} = -\sum_{m=1}^{i} d_{i-m,0} \cdot \frac{\sigma_m}{y_n},\ i = \overline{1,4},$$

$$d_{\nu,1} = -\frac{d_{\nu+1,0}}{d_{\nu,0}},\ \nu = \overline{1,3},\ d_{\mu,2} = d_{\mu+1,1} - d_{\mu,1},\ \mu = 1, 2,$$

$$d_{1,3}=d_{1,2}\frac{d_{2,2}}{d_{1,2}},\ \sigma_m=h\sum_{i=1}^{4}a_{mi}k_i, \tag{3}$$

$$k_i=f(x_n+\alpha_i h,\ \ y_n+h\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}k_j),\ \alpha_i=\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij},\ y_n\neq 0.$$

Тут h – крок інтегрування ($h=x_{n+1}-x_n, n=0,1,2,...$), a_{ij}, α_i, β_{ij} – параметри.

Розвинувши формулу (2)-(3) в ряд по степенях h і прирівнявши до нуля, коефіцієнти у степенях h^i $(i=1,4)$, отримаємо умови, які мають задовольняти параметри a_{ij}, α_i, β_{ij} $(i,j=\overline{1,4})$, щоб

$$y\left(x_{n+1}\right)-y_{n+1}^{[k,l]}=O\left(h^5\right).$$

Ці формули допомагають будувати явні ($\beta_{ij}=0$, при $i\le j$) та неявні числові методи.

Розглянемо побудову методу четвертого порядку точності для чисельного розв'язування задачі (1) при $k=4$, $l=0$, тобто

$$y_{n+1}^{[4,0]}=\frac{y_n}{\sum\limits_{k=0}^{4}d_{k,0}},\ \ n=0,1,2,..., \tag{4}$$

$$d_{0,0}=1,\ d_{k,0}=-\sum_{m=1}^{k}d_{k-m,0}\cdot\frac{\sigma_m}{y_n},\ k=\overline{1,4},\ \sigma_m=h\cdot\sum_{i=1}^{4}a_{mi}k_i,$$

$$k_i=f\left(x_n+\alpha_i h,\ y_n+h\sum_{j=1}^{4}\beta_{ij}k_j\right),\ \alpha_i=\sum_{j=1}^{4}\beta_{ij},\ \ y_n\neq 0. \tag{5}$$

Підставивши вирази для $d_{k,0}$ $\left(k=\overline{0,4}\right)$ в (2), одержимо

$$y_{n+1}^{[4,0]}=\frac{P_{[4,0]}}{Q_{[4,0]}},$$

де

$$P_{[4,0]}=y_n^5,$$

$$\begin{aligned}Q_{[4,0]}=&y_n^4-hy_n^3\left\{\sum_{m=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}a_{mi}k_i\right\}+h^2y_n^2\left\{\left(\sum_{i=1}^{4}a_{1i}k_i\right)^2\right.\\&\left.+2\left(\sum_{i=1}^{4}a_{1i}k_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4}a_{2i}k_i+\sum_{i=1}^{4}a_{3i}k_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{4}a_{2i}k_i\right)^2\right\}\\&-h^3y_n\left\{\left(\sum_{i=1}^{4}a_{1i}k_i\right)^3+3\left(\sum_{i=1}^{4}a_{1i}k_i\right)^2\cdot\left(\sum_{i=1}^{4}a_{2i}k_i\right)\right\}+h^4\left(\sum_{i=1}^{4}a_{1i}k_i\right)^4.\end{aligned}$$

Розвинувши

$$k_i=f\left(x_n+\alpha_i h,\, y_n+h\sum_{j=1}^{4}\beta_{ij}k_j\right)\quad\left(i=\overline{1,4}\right)$$

в ряд Тейлора по степеням h і позначивши

$$D^{\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^{\nu},$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} a_{mi} k_i = \left(\sum_{i=1}^{4} a_{mi} \right) f + h \left(\sum_{i=1}^{4} a_{mi} \alpha_i \right) Df + \\ + h^2 \left\{ \left(\sum_{i=1}^{4} a_{mi} \sum_{j=1}^{4} \beta_{ij} \alpha_j \right) \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df + \left(\sum_{i=1}^{4} a_{mi} \frac{\alpha_i^2}{2} \right) D^2 f \right\} + \\ + h^3 \left\{ \left(\sum_{i=1}^{4} a_{mi} \frac{\alpha_i^3}{6} \right) D^3 f + \left(\sum_{i=1}^{4} a_{mi} \sum_{j=1}^{4} \beta_{ij} \frac{\alpha_j^2}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial y} \cdot D^2 f + \right. \\ + \left(\sum_{i=1}^{4} a_{mi} \alpha_i \sum_{j=1}^{4} \beta_{ij} \alpha_j \right) \cdot Df \cdot D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \\ \left. + \left(\sum_{i=1}^{4} a_{mi} \sum_{l=1}^{4} \beta_{il} \sum_{j=1}^{4} \beta_{lj} \alpha_j \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \cdot Df \right\} + O\left(h^4\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Підставивши (6) в $Q_{[4,0]}$, одержимо

$$Q_{[4,0]} = y_n^4 - h y_n^3 \cdot f \left\{ \sum_{m=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} a_{mi} \right\} + h^2 \left\{ y_n^2 f^2 \left[\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i} \right)^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. +2 \left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i} \right) \left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i} + \sum_{i=1}^{4} a_{3i} \right) \right] - y_n^3 \cdot Df \left(\sum_{m=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} a_{mi} \alpha_i \right) \right\} +$$

$$+h^3 \left\{ 2 y_n^2 \cdot f \cdot Df \left[\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i} \right) \left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i} \alpha_i + \sum_{i=1}^{4} a_{2i} \alpha_i + \sum_{i=1}^{4} a_{3i} \alpha_i \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i} \right) \left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i} \alpha_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i} \alpha_i \right) \left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i} + \sum_{i=1}^{4} a_{3i} \right) \right] -$$

$$-y_n \cdot f^3 \left[3 \left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i} \right) + \left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i} \right)^3 \right] -$$

$$\left. -y_n^3 \cdot D^2 f \cdot \left(\sum_{m=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} a_{mi} \frac{\alpha_i^2}{2} \right) - y_n^3 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df \cdot \left(\sum_{m=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} a_{mi} \sum_{j=1}^{4} \beta_{ij} \alpha_j \right) \right\} +$$

$$+h^4\left\{\left[\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\alpha_i+2\sum_{i=1}^4 a_{2i}\alpha_i+2\sum_{i=1}^4 a_{3i}\alpha_i\right)+\left(\sum_{i=1}^4 a_{2i}\alpha_i\right)^2\right]\times\right.$$

$$\times y_n^2\cdot(Df)^2+2\left[\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\right)\left(\sum_{m=1}^3\sum_{i=1}^4 a_{mi}\frac{\alpha_i^2}{2}\right)+\sum_{i=1}^4 a_{2i}\left(\sum_{i=1}^4 a_{2i}\frac{\alpha_i^2}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\frac{\alpha_i^2}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^4 a_{2i}+\sum_{i=1}^4 a_{3i}\right)\right]\times y_n^2\cdot f\cdot D^2f+$$

$$+2\left[\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\right)\left(\sum_{m=1}^3\sum_{i=1}^4 a_{mi}\sum_{j=1}^4\beta_{ij}\alpha_j\right)+\left(\sum_{i=1}^4 a_{2i}\right)\left(\sum_{i=1}^4 a_{2i}\sum_{j=1}^4\beta_{ij}\alpha_j\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i=1}^4 a_{2i}\sum_{j=1}^4\beta_{ij}\alpha_j\right)\left(\sum_{i=1}^4 a_{2i}+\sum_{i=1}^4 a_{3i}\right)\right]y_n^2\cdot f\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot Df-$$

$$-3\left[\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\right)^2\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\alpha_i+\sum_{i=1}^4 a_{2i}\alpha_i\right)+2\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^4 a_{2i}\right)\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\alpha_i\right)\right]\times$$

$$\times y_n\cdot f^2\cdot Df+\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\alpha_i\right)^4 f^4-\left(\sum_{m=1}^4\sum_{i=1}^4 a_{mi}\frac{\alpha_i^3}{6}\right)y_n^3\cdot D^3f-$$

$$-\left(\sum_{m=1}^4\sum_{i=1}^4 a_{mi}\sum_{j=1}^4\beta_{ij}\frac{\alpha_j^2}{2}\right)y_n^3\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot D^2f-\left(\sum_{m=1}^4\sum_{l=1}^4 a_{ml}\sum_{i=1}^4\beta_{li}\sum_{j=1}^4\beta_{ij}\alpha_j\right)\times$$

$$\left.\times y_n^3\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cdot Df-\left(\sum_{m=1}^4\sum_{i=1}^4 a_{mi}\alpha_i\sum_{j=1}^4\beta_{ij}\alpha_j\right)y_n^3\cdot Df\cdot D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\}+O\left(h^5\right).$$

Знайдемо різницю

$$y\left(x_{n+1}\right)\cdot Q_{[4,0]}-P_{[4,0]}=\left(1-\sum_{m=1}^4\sum_{i=1}^4 a_{mi}\right)h\cdot y_n^4\cdot f+$$

$$+h^2\left(\frac{1}{2}-\sum_{m=1}^4\sum_{i=1}^4 a_{mi}\alpha_i\right)\cdot y_n^4\cdot Df+h^2\left[\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^4 a_{2i}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^4 a_{2i}+\sum_{i=1}^4 a_{3i}\right)-\sum_{m=1}^4\sum_{i=1}^4 a_{mi}\right]y_n^3f^2+h^3y_n^4\cdot D^2f\times$$

$$\times\left(\frac{1}{6}-\sum_{m=1}^4\sum_{i=1}^4 a_{mi}\frac{\alpha_i^2}{2}\right)+h^3\cdot y_n^4\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot Df\left(\frac{1}{6}-\sum_{m=1}^4\sum_{i=1}^4 a_{mi}\sum_{j=1}^4\beta_{ij}\alpha_j\right)+$$

$$+y_n^3\cdot f\cdot Df\cdot h^3\left[2\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\right)\left(\sum_{m=1}^3\sum_{i=1}^4 a_{mi}\alpha_i\right)+2\left(\sum_{i=1}^4 a_{1i}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^4 a_{2i}+\right.\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{4} a_{3i}\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i}\alpha_i\right) - \sum_{m=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\Bigg] +$$

$$+ h^3 \cdot y_n^2 \cdot f^3 \left[\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i} + \sum_{i=1}^{4} a_{3i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i}\right)^2 -\right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\right)^3 - 3\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i}\right)\right] + h^4 \cdot y_n^4 \cdot D^3 f\left(\frac{1}{24} - \sum_{m=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\frac{\alpha_i^3}{6}\right) +$$

$$+ h^4 \cdot y_n^4 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot D^2 f\left(\frac{1}{24} - \sum_{m=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\sum_{j=1}^{4}\beta_{ij}\frac{\alpha_j^2}{2}\right) +$$

$$+ h^4\left(\frac{1}{24} - \sum_{m=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} a_{ml}\sum_{i=1}^{4}\beta_{li}\sum_{j=1}^{4}\beta_{ij}\alpha_j\right) y_n^4 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot Df +$$

$$+ h^4\left(\frac{3}{24} - \sum_{m=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\alpha_i\sum_{j=1}^{4}\beta_{ij}\alpha_j\right) y_n^4 \cdot Df \cdot D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) +$$

$$+ h^4\left[2\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\right)\left(\sum_{m=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\sum_{j=1}^{4}\beta_{ij}\alpha_j\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i}\sum_{j=1}^{4}\beta_{ij}\alpha_j\right) +\right.$$

$$+ 2\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\sum_{j=1}^{4}\beta_{ij}\alpha_j\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i} + \sum_{i=1}^{4} a_{3i}\right) - \sum_{m=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\sum_{j=1}^{4}\beta_{ij}\alpha_j -$$

$$\left. -\frac{1}{6}\left(\sum_{m=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\right)\right] y_n^3 \cdot f \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot Df + h^4\left[2\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i}\frac{\alpha_i^2}{2}\right) +\right.$$

$$+ 2\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\right)\left(\sum_{m=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\frac{\alpha_i^2}{2}\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\frac{\alpha_i^2}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i} + \sum_{i=1}^{4} a_{3i}\right) -$$

$$\left. - \sum_{m=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\frac{\alpha_i^2}{2} - \frac{1}{6}\sum_{m=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\right] y_n^3 \cdot f \cdot D^2 f + h^4\left[\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\alpha_i\right)^2 +\right.$$

$$\left. +2\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i}\alpha_i + \sum_{i=1}^{4} a_{3i}\alpha_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i}\alpha_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\alpha_i\right] \times$$

$$\times\, y_n^3\,(Df)^2 + h^4\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i} + \sum_{i=1}^{4} a_{3i}\right) +\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i}\right)^2 - 3\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\alpha_i + \sum_{i=1}^{4} a_{2i}\alpha_i\right) -$$

$$- 6\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_{2i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\alpha_i\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{4} a_{1i}\right)\left(\sum_{m=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} a_{mi}\alpha_i\right) +$$

$$+2\left(\sum_{i=1}^{4}a_{1i}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4}a_{2i}+\sum_{i=1}^{4}a_{3i}\right)+2\left(\sum_{i=1}^{4}a_{2i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4}a_{2i}\alpha_i\right)\Bigg]y_n^2\cdot f^2\cdot Df+$$
$$+h^4\cdot y_n\cdot f^4\left[\left(\sum_{i=1}^{4}a_{1i}\right)^4-3\left(\sum_{i=1}^{4}a_{1i}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{4}a_{2i}\right)-\left(\sum_{i=1}^{4}a_{1i}\right)^3\right]+O\left(h^5\right). \quad (7)$$

Прирівнявши до нуля, коефіцієнти у степенях h^i $(i=1,4)$, отримаємо умови, які мають задовольняти параметри a_{ij}, α_i, β_{ij} $(i,j=\overline{1,4})$, щоб $y\left(x_{n+1}\right)-y_{n+1}^{[4,0]}=O(h^5)$. Наведемо знаходження коефіцієнтів для явних методів. Приймемо $\beta_{ij}=0$ за $i\le j$, $\alpha_1=0$, а також $a_{11}=1$, $a_{1i}=a_{23}=a_{24}=0$, $\left(i=\overline{2,4}\right)$. Тоді з коефіцієнтів у $hy_n^4\cdot f$, $h^2y_n^3\cdot f$, $h^3y_n^2\cdot f^3$ і $h^4y_n\cdot f^4$ випливає, що

$$a_{21}+a_{22}=0,\ \sum_{i=1}^{4}a_{3i}=0,\ \sum_{i=1}^{4}a_{4i}=0.$$

У підсумку матимемо:

$$\begin{aligned}
hy_n^4f:&\quad a_{21}+a_{22}+\sum_{i=1}^{4}a_{3i}+\sum_{i=1}^{4}a_{4i}=0,\\
h^2y_n^4Df:&\quad \frac{1}{2}-\left\{\left(a_{22}+a_{32}+a_{42}\right)\alpha_2+\left(a_{33}+a_{43}\right)\alpha_3+\left(a_{34}+a_{44}\right)\alpha_4\right\}=0,\\
h^3y_n^4\frac{\partial f}{\partial y}Df:&\quad \frac{1}{6}-\left\{\left(a_{33}+a_{43}\right)\beta_{32}\alpha_2+\left(a_{34}+a_{44}\right)\left(\beta_{42}\alpha_2+\beta_{43}\alpha_3\right)\right\}=0,\\
h^3y_n^4D^2f:&\quad \frac{1}{6}-\left\{\left(a_{22}+a_{32}+a_{42}\right)\frac{\alpha_2^2}{2}+\left(a_{33}+a_{43}\right)\frac{\alpha_3^2}{2}+\left(a_{34}+a_{44}\right)\frac{\alpha_4^2}{2}\right\}=0,\\
h^3y_n^3f\cdot Df:&\quad -\frac{1}{2}-\left\{\left(a_{22}+a_{32}+a_{42}\right)\alpha_2+\left(a_{33}+a_{43}\right)\alpha_3+\left(a_{34}+a_{44}\right)\alpha_4\right\}+\\
&\quad +2\left\{\left(a_{22}+a_{32}\right)\alpha_2+a_{33}\alpha_3+a_{34}\alpha_4\right\}=0,\\
h^4y_n^4\cdot D^3f:&\quad \frac{1}{24}-\frac{1}{6}\left\{\left(a_{22}+a_{32}+a_{42}\right)\alpha_2^3+\left(a_{33}+a_{43}\right)\alpha_3^3+\left(a_{34}+a_{44}\right)\alpha_4^3\right\}=0,\\
h^4y_n^4\frac{\partial f}{\partial y}D^2f:&\quad \frac{1}{24}-\frac{1}{2}\left\{\left(a_{33}+a_{43}\right)\beta_{32}\alpha_2^2+\left(a_{34}+a_{44}\right)\left(\beta_{42}\alpha_2^2+\beta_{43}\alpha_3^2\right)\right\}=0,\\
h^4y_n^4DfD\frac{\partial f}{\partial y}:&\quad \frac{3}{24}-\left\{\left(a_{33}+a_{43}\right)\alpha_3\beta_{32}\alpha_2+\left(a_{34}+a_{44}\right)\alpha_4\left(\beta_{42}\alpha_2+\beta_{43}\alpha_3\right)\right\}=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^4y_n^4\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2Df:&\quad \frac{1}{24}-\left(a_{34}+a_{44}\right)\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2=0,\\
h^4y_n^3\cdot f\cdot D^2f:&\quad -\frac{1}{6}+2\left\{\left(a_{22}+a_{32}\right)\frac{\alpha_2^2}{2}+a_{33}\frac{\alpha_3^2}{2}+a_{34}\frac{\alpha_4^2}{2}\right\}-\\
&\quad -\left\{\left(a_{22}+a_{32}+a_{42}\right)\frac{\alpha_2^2}{2}+\left(a_{33}+a_{43}\right)\frac{\alpha_3^2}{2}+\left(a_{34}+a_{44}\right)\frac{\alpha_4^2}{2}\right\}=0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h^4 y_n^3 f \frac{\partial f}{\partial y} Df: \quad & -\frac{1}{6} + 2\left(a_{33}\beta_{32}\alpha_2 + a_{34}\left(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3\right)\right) - \\
& - \left(a_{33} + a_{43}\right)\beta_{32}\alpha_2 - \left(a_{34} + a_{44}\right)\left(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3\right) = 0, \\
h^4 y_n^3 \left(Df\right)^2: \quad & -\frac{1}{2}\left[\left(a_{22} + a_{32} + a_{42}\right)\alpha_2 + \left(a_{33} + a_{43}\right)\alpha_3 + \left(a_{34} + a_{44}\right)\alpha_4\right] + \\
& + \left(a_{22}\alpha_2\right)^2 = 0, \\
h^4 y_n^2 f^2 Df: \quad & \frac{1}{2} - 3a_{22}\alpha_2 + 2\left\{\left(a_{22} + a_{32}\right)\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4\right\} = 0, \\
& \alpha_1 = 0,\ \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij},\ \left(i = 2, 3, 4\right), \\
& a_{11} = 1,\ \sum_{i=1}^{4} a_{4i} = 0,\ \sum_{i=1}^{4} a_{3i} = 0, \\
& a_{21} + a_{22} = 0,\ a_{1i} = 0,\ i = 2, 3, 4;\ a_{23} = a_{24} = 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

З рівнянь для коефіцієнтів у $h^2 y_n^4 \cdot Df$, $h^3 y_n^3 f \cdot Df$, $h^4 y_n^3 \left(Df\right)^2$, $h^4 y_n^2 f^2 Df$ випливає, що

$$a_{21}\alpha_2 = \frac{1}{2},$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_{3i}\alpha_i = 0,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_{4i}\alpha_i = 0.$$

А з рівнянь для коефіцієнтів у $h^3 y_n^4 \cdot D^2 f$, $h^4 y_n^3 f \cdot D^2 f$ і $h^3 y_n^4 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df$, $h^4 y_n^3 f \cdot Df$ знайдемо, що

$$\left(a_{22} + a_{32}\right)\frac{\alpha_2^2}{2} + a_{33}\frac{\alpha_3^2}{2} + a_{34}\frac{\alpha_4^2}{2} = \frac{1}{6},$$

$$a_{33}\beta_{32}\alpha_2 + a_{34}\left(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3\right) = \frac{1}{6},$$

і тоді

$$a_{42}\frac{\alpha_2^2}{2} + a_{43}\frac{\alpha_3^2}{2} + a_{44}\frac{\alpha_4^2}{2} = 0,$$

$$a_{43}\beta_{32}\alpha_2 + a_{44}\left(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3\right) = 0.$$

Так одержали систему

$$\begin{cases} (a_{22}+a_{32}+a_{42})\,\alpha_2+(a_{33}+a_{43})\,\alpha_3+(a_{34}+a_{44})\,\alpha_4=\dfrac{1}{2}, \\ (a_{22}+a_{32}+a_{42})\,\dfrac{\alpha_2^2}{2}+(a_{33}+a_{43})\,\dfrac{\alpha_3^2}{2}+(a_{34}+a_{44})\,\dfrac{\alpha_4^2}{2}=\dfrac{1}{6}, \\ (a_{22}+a_{32}+a_{42})\,\dfrac{\alpha_2^3}{6}+(a_{33}+a_{43})\,\dfrac{\alpha_3^3}{6}+(a_{34}+a_{44})\,\dfrac{\alpha_4^3}{6}=\dfrac{1}{24}, \\ (a_{33}+a_{43})\,\beta_{32}\alpha_2+(a_{34}+a_{44})\,(\beta_{42}\alpha_2+\beta_{43}\alpha_3)=\dfrac{1}{6}, \\ (a_{33}+a_{43})\,\beta_{32}\alpha_2^2+(a_{34}+a_{44})\left(\beta_{42}\alpha_2^2+\beta_{43}\alpha_3^2\right)=\dfrac{1}{12}, \\ (a_{33}+a_{43})\,\alpha_3\beta_{32}\alpha_2+(a_{34}+a_{44})\,(\beta_{42}\alpha_2+\beta_{43}\alpha_3)=\dfrac{3}{24}, \\ (a_{34}+a_{44})\,\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2=\dfrac{1}{24}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{4}a_{4i}=0,\ \sum_{i=2}^{4}a_{4i}\alpha_i=0,\ \sum_{i=2}^{4}a_{4i}\frac{\alpha_i^2}{2}=0, \\ a_{43}\beta_{32}\alpha_2+a_{44}\,(\beta_{42}\alpha_2+\beta_{43}\alpha_3)=0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{4}a_{3i}=0,\ \sum_{i=2}^{4}a_{3i}\alpha_i=0, \\ (a_{22}+a_{32})\,\dfrac{\alpha_2^2}{2}+a_{33}\dfrac{\alpha_3^2}{2}+a_{34}\dfrac{\alpha_4^2}{2}=\dfrac{1}{6}, \\ a_{33}\beta_{32}\alpha_2+a_{34}\,(\beta_{42}\alpha_2+\beta_{43}\alpha_3)=\dfrac{1}{6}, \\ a_{21}+a_{22}=0,\ a_{22}\alpha_2=\dfrac{1}{2},\ \alpha_i=\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}. \end{cases} \tag{9}$$

Опишемо схему розв'язування системи (9).

Нехай $\alpha_2=\alpha_3$. З перших двох рівнянь визначимо

$$a_{22}+a_{32}+a_{42}+a_{33}+a_{43}=\frac{3\alpha_4-2}{6\alpha_3\,(\alpha_4-\alpha_3)},$$

$$a_{34}+a_{44}=\frac{2-3\alpha_3}{6\alpha_4\,(\alpha_4-\alpha_3)}.$$

Підставивши ці значення в третє рівняння системи, одержимо співвідношення, яке поєднує параметри α_3 і α_4

$$4\,(\alpha_3+\alpha_4)-6\alpha_3\alpha_4-3=0,\ \ \alpha_4=\frac{3-4\alpha_3}{2\,(2-3\alpha_3)}. \tag{10}$$

З четвертого і п'ятого рівнянь випливає, що $\alpha_3=\dfrac{1}{2}$, тоді згідно з (10) $\alpha_4=1$.

З рівнянь $a_{22}\alpha_2=\dfrac{1}{2}$, $a_{21}+a_{22}=0$ одержимо

$$a_{21}=-\frac{1}{2\alpha_2}=-1,\ \ a_{22}=\frac{1}{2\alpha_2}=1.$$

Тепер з рівнянь

$$\sum_{i=1}^{4}a_{3i}=0,\ \sum_{i=1}^{4}a_{3i}\alpha_i=0,\ (a_{22}+a_{32})\,\frac{\alpha_2^2}{2}+a_{33}\frac{\alpha_3^2}{2}+a_{34}\frac{\alpha_4^2}{2}=\frac{1}{6},$$

отримаємо

$$a_{31} = \frac{1}{6},\ \ a_{32} + a_{33} = -\frac{1}{3},\ \ a_{34} = \frac{1}{6}.$$

З рівнянь (з восьмого до одинадцятого) випливає, що $a_{4i} = 0$, $(i = 1, 4)$. Використовуючи сьоме рівняння, запишемо β_{32} і β_{43}

$$\beta_{32} = \frac{1}{24\,(a_{34} + a_{44})\,\beta_{43}\alpha_3} = \frac{1}{2\beta_{43}}.$$

З четвертого і шостого рівняння pj,hfpbvj a_{33} і β_{42} через β_{43}

$$a_{33} = \frac{1}{6\beta_{32}} = \frac{\beta_{43}}{3},\ \ \beta_{42} = 1 - \beta_{43},$$

і тоді в $a_{32} = -\dfrac{1 + \beta_{43}}{3}$. Із співвідношень $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}\ \left(i = \overline{2, 4}\right)$ визначимо

$$\beta_{21} = \frac{1}{2},\ \ \beta_{31} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta_{43}},\ \ \beta_{41} = 0.$$

Отже, розв'язок системи (9) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2},\ \ \alpha_4 = 1,\ \ \beta_{21} = \frac{1}{2},\ \ \beta_{31} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta_{43}},\\
&\beta_{32} = \frac{1}{2\beta_{43}},\ \ \beta_{41} = 0,\ \ \beta_{42} = 1 - \beta_{43},\\
&a_{11} = 1,\ \ a_{21} = -1,\ \ a_{22} = 1,\ \ a_{31} = \frac{1}{6},\ \ a_{32} = -\frac{1 + \beta_{43}}{3},\\
&a_{33} = \frac{\beta_{43}}{3},\ \ a_{34} = \frac{1}{6},\ (a_{1i} = 0,\ \ i = \overline{2, 4};\ a_{4i} = 0,\ \ i = \overline{1, 4},\\
&\ a_{23} = a_{24} = 0;\ \beta_{ij} = 0,\ \ i \le j)\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

Приведемо конкретний набір значень параметрів $a_{ij},\ \ \alpha_i,\ \ \beta_{ij}$

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 = 1/2,\ \alpha_3 = 1/2,\ \beta_{21} = 1/2,\ \beta_{31} = 0,\ \beta_{32} = 1/2,\\
&\alpha_4 = 1,\ \beta_{41} = 0,\ \beta_{42} = 0,\ \beta_{43} = 1,\ a_{11} = 1,\ a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0,\\
&a_{21} = -1,\ a_{22} = 1,\ a_{31} = 1/6,\ a_{32} = -2/3,\\
&a_{33} = 1/3,\ a_{34} = 1/6,\ a_{4i} = 0,\ (i = \overline{1, 4}).
\end{aligned} \tag{12}$$

При $\alpha_2 \neq \alpha_3$ матимемо:

$$a_{11} = 1,\ a_{21} = -\frac{1}{2\alpha_2},\ a_{22} = \frac{1}{2\alpha_2},\ \beta_{21} = \alpha_2,$$

$$a_{32} = \frac{3\,(1 + 2\alpha_3\alpha_4) - 4\,(\alpha_3 + \alpha_4) - 6\,(\alpha_3 - \alpha_2)\,(\alpha_4 - \alpha_2)}{12\alpha_2\,(\alpha_3 - \alpha_2)\,(\alpha_4 - \alpha_2)},$$

$$a_{33} = \frac{3\,(1 + 2\alpha_2\alpha_4) - 4\,(\alpha_2 + \alpha_4)}{12\alpha_3\,(\alpha_2 - \alpha_3)\,(\alpha_4 - \alpha_3)},\ \beta_{32} = \frac{4\alpha_4 - 3}{24\alpha_2\,(\alpha_4 - \alpha_3) \cdot a_{33}},$$

$$a_{34} = \frac{3(1+2\alpha_3\alpha_3) - 4(\alpha_2+\alpha_3)}{12\alpha_4(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)},\ \beta_{31} = \alpha_3 - \beta_{32},$$

$$a_{31} = -(a_{32}+a_{33}+a_{34}),\ \beta_{41} = \alpha_4 - \beta_{42} - \beta_{43},$$

$$\beta_{42} = \frac{(3-4\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2) + 2(2\alpha_2-1)(\alpha_4-\alpha_3)}{24\alpha_2(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)\cdot a_{34}},\ a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0,$$

$$\beta_{43} = \frac{1-2\alpha_2}{12\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)\cdot a_{34}},\ a_{23} = a_{24} = 0,\ a_{4i} = 0,\ i = \overline{1,4}, \tag{13}$$

де $\alpha_4 = 1$, α_2 і α_3 – довільні числа, які задовольняють співвідношення

$$\alpha_2 \cdot \alpha_3(\alpha_2-\alpha_3)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3) \neq 0.$$

Зауваження. Якщо розглянути формули (2)-(3) при $k = 3,\ l = 1$; $k = 2,\ l = 2$; $k = 3,\ l = 1$, то, провівши аналогічні викладки, отримаємо, що за тих самих параметрів $a_{ij},\ \alpha_i\ \beta_{ij}$ маємо оцінку $y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[k,l]} = O\left(h^5\right)$.

3. Двосторонні розрахункові формули третього порядку точності

Для оцінки локальної похибки на кожному кроці інтегрування побудовано двосторонні наближення третього порядку точності. Ці розрахункові формули будують так, щоб локальні похибки схеми в кожній вузловій точці набували вигляду:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \omega h^p KF(f) + O(h^{p+1}),$$

де $y(x_{n+1})$ і y_{n+1}, відповідно, точний і наближений розв'язок задачі (1); h – крок інтегрування; $F(f)$ – деякий диференціальний оператор, обчислений у точці $(x_n,\ y_n)$; K – константа; p – порядок точності; ω – параметр двосторонності.

Прирівняємо у співвідношеннях (8) коефіцієнти при $h^4y_n^3fD^2f$ і $h^4y_n^3f\frac{\partial f}{\partial y}Df$ до ω. Після спрощень в системі (9) отримаємо наступні рівняння:

$$\begin{gathered}\sum_{i=2}^{4} a_{4i}\frac{\alpha_i^2}{2} = -\frac{\omega}{2},\\ a_{43}\beta_{32}\alpha_2 + a_{44}(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = -\frac{\omega}{2}.\end{gathered} \tag{14}$$

Розв'язавши систему (9) при умовах (14), отримаємо значення параметрів a_{ij}, α_i, β_{ij} для двосторонніх обчислювальних формул. Наведемо значення параметрів при $\alpha_2 = \alpha_3$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2},\ \beta_{21} = \frac{1}{2},\ \beta_{31} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta_{43}},\ \beta_{32} = \frac{1}{2\beta_{43}},$$

$$\alpha_4 = 1,\ \beta_{41} = 0,\ \beta_{42} = 1 - \beta_{43},$$

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0,\ a_{21} = -1,\ a_{22} = 1,\ a_{23} = a_{24} = 0,$$

$$a_{31} = \frac{1}{6} + 2\omega,\ a_{32} = 2\omega(\beta_{43} - 2) - \frac{1}{3}(1 + \beta_{43}),$$

$$a_{33} = \frac{1}{3}\beta_{43}(1 - 6\omega),\ a_{34} = \frac{1}{6} + 2\omega,\ a_{41} = -2\omega,$$

$$a_{42} = 2\omega\left(2 - \beta_{43}\right), \; a_{43} = 2\beta_{43}\omega, \; a_{44} = -2\omega, \tag{15}$$

де β_{43} – відмінний від нуля параметр. У цьому випадку

$$y_{n+1} - y_{n+1}^{[4,0]} = \omega h^4 \frac{f\left(D^2 f + f_y D f\right)}{y_n - hf} + O\left(h^5\right) \cong \omega h^2 f \left(\sum_{i=1}^{4} \tilde{a}_{4i} k_i\right) / y_{n-1} + O\left(h^5\right). \tag{16}$$

Знаючи лише $k_i \, (i = \overline{1,4})$, можна в кожній вузловій точці оцінити величину головного члена локальної похибки Пара формул, що відповідає двом значенням ω, які відрізняються лише знаком, становлять формули двостороннього методу. За наближений розв'язок приймаємо півсуму двосторонніх наближень.

Ці розрахункові формули використовували для розрахунку й аналізу розподілу магнітного поля у магнітотвердому шарі, що знаходиться за умов одночасної дії гармонійного за часом і постійного магнітного полів.

4. Висновки

Запропоновані формули, використовуючи лише чотири звертання до правої частини диференціального рівняння, дають змогу отримувати в кожній вузловій точці не тільки односторонній метод четвертого порядку точності та двосторонні формули третього порядку точності, а також оцінку головного члена похибки двосторонніх наближень.

Зауважимо, що відомі відповідні двосторонні методи Рунге-Кутта третього порядку точності містять щонайменше шість звертань до правої частини вихідного диференціального рівняння.

Модульний характер запропонованих розрахункових формул дає змогу в кожній точці інтегрування отримати кілька наближень до точного розв'язку, порівняння яких використовують для вибору кроку інтегрування.

Список використаної літератури

1. *Бахвалов Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов. – Москва: Наука, 1975. – 632 с.
2. *Бейкер Дж.* Аппроксимации Паде. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – Москва: Мир, 1986. – 502 с.
3. *Горбунов А Д.* О приближенном решении задачи Коши для обыкновенних дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. I / А. Д. Горбунов, Ю. А. Шахов // Журн. вычислит. математики и матем. физики. – 1963. – Т. 3, № 2. – С. 239–253.
4. *Горбунов А. Д.* О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. II / А. Д. Горбунов, Ю. А. Шахов // Журн. вычислит. математики и матем. физики. – 1964. – Т. 4, № 3. – С. 426–433.
5. *Джоунс У.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения / У. Джоунс, В. Трон. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
6. *Добронец Б. С.* Двусторонние численные методы / Б. С. Добронец, В. В. Шайдуров. – Новосибрск: Наука, 1990. – 206 с.
7. *Крылов В. И.* Вычислительные методы. Том II / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука. 1977. – 400 с.
8. *Ляшко И. И.* Методы вичислений / И. И. Ляшко, В. Л. Макаров, А. А. Скоробогатько. – Киев: Вища школа, 1977. – 408 с.
9. *Новиков Е. А.* Явные методы для жестких систем / Е. А. Новиков. – Новосибирск: Наука, 1997. – 197 с.

10. *Новиков Е. А.* Компютерное моделирование жестких гибридных систем / Е. А. Новиков, Ю. В. Шорников. – Новосибирск: Наука, 2013. – 452 с.
11. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике / В. Я. Скоробогатько. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
12. *Хайрер Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. – Москва: Мир, 1990. – 512 с.
13. *Холл Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт. – Москва: Мир, 1979. – 312 с.
14. *Шахов Ю. А.* Решение задачи Коши с наперед заданным числом верных знаков для обыкновенного дифференциального уравнения / Ю. А. Шахов // Вопросы вычислительной математики. – Труды ВЦ АН ГрузССР, Тбилиси. – 1973. – Т. 12, № 1. – С. 105–117.
15. *Aptekarev A. I.* Pade approximants for functions with branch points-strong asymptotics of Nuttall–Stahl polynomials / A. I. Aptekarev, M. L. Yattselev // Acta Math. – 2015. – Vol. 215. – P. 217–280.
16. *Butcher J. C.* Numerical methods for ordinary differential equations / J. C. Butcher. – Chichester: John Wiley & Sons, 2008. – 463 p.
17. *Butusov D.* The Effects of Pad Numerical Integration in Simulation of Conservative Chaotic Systems / D. Butusov, A. Karimov, A. Tutueva, D. Kaplun and E. G. Nepomuceno // Entropy. – 2019. – Vol. 21, No. 4. – P. 362–369.
18. *Lambert J. D.* Computational methods in ordinary differential equations / J. D. Lambert. – London, New-York: Wiley & Sons, 1973. – 278 p.
19. *Matinfar M.* An efficient method for Cauchy problem of ill-posed nonlinear diffusion equation / M. Matinfar, M. Eslami, M. Saeidy // International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. – 2013. – Vol. 23, No. 3. – P. 427–435.
20. *Nakatsukasa Y.* The AAA Algorithm For Rational Approximation / Y. Nakatsukasa, O. Sete, L. N. Trefethen // Siam J. Sci. Comput. – 2018. – Vol. 40, No. 3. – P. A1494–A1522.
21. *Pelekh Ya. M.* Nonlinear numerical methods for the solution of initial value problem for ordinary differential equations / Ya. M. Pelekh, S. M. Mentynskyi, R. Ya. Pelekh // Scientific Bulletin of Mukachevo. Journal of Scientific Articles. – 2016. – Vol. 20, No. 15. – P. 65–75.
22. *Zaiats V.* Numerical Methods of second order with minimal error of discretization and their application to the analysis of high-quality systems / V. Zaiats, M. Zaiats // Perspective Technologies and Methods in MEMS Design, MEMSTECH, Lviv. – 2018. – P. 264–267.

Стаття: надійшла до редколегії 15.11.2019
доопрацьована 20.11.2019
прийнята до друку 20.11.2019

METHODS OF SOLVING THE INITIAL VALUE PROBLEM WITH THE ASSESSMENT THE MAIN MEMBER OF A LOCAL ERROR

Ya. Pelekh, I. Budz, A. Kunynets, B. Fil

Lviv Polytechnic National University,
Bandera Str., 12, Lviv, 79013, e-mail: Pelekh_Ya_M@ukr.net

Many applied problems, for example, when designing electronic circuits, automatic control systems, calculating the dynamics of mechanical systems, chemical kinetics problems, in the general case are reduced to solving nonlinear differential equations and their systems. The order of the system of differential equations depends on the selected model.

Exact solutions to the studied problems can be obtained only in individual cases. Therefore, it is necessary to use approximate methods. In the study of mathematical models, there is a need to find not only an approximate solution, but also a guaranteed estimate of the error.

The use of traditional two-sided Runge-Kutta methods leads to a significant increase in the volume of calculations, since the construction of upper and lower approximations to the exact solution requires additional calls to the right side of the differential equation and, in addition, these methods do not estimate the main member of the local error.

Fractional-rational approximations are widely used in applied mathematics, since under appropriate conditions they give a high convergence rate, monotonous and two-sided approximations, and have a weak sensitivity to rounding error.

In this paper, nonlinear methods of Runge-Kutta type of the fourth order of accuracy, as well as bilateral third-order formulas for solving the Cauchy problem for ordinary differential equations based on continued fractions, are derived. In the proposed approach, using only four calls to the right side of the differential equation, a fourth-order accuracy method is constructed, as well as upper and lower approximations to the exact solution of the third order of accuracy. For the practical estimation of the error at each integration step in the case of using formulas of the Runge-Kutta type of the fourth order of accuracy, two-sided third-order computational formulas are used. Note that when using the proposed calculation formulas in each grid node, several approximations to the exact solution will be obtained, the comparison of which gives useful information, in particular, in the question of choosing the integration step or in assessing the accuracy of the result.

Key words: Initial value problem, continued fractions, numerical methods, nonlinear methods, two-sided approximation.