

УДК 517.9

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З ЗАСТОСУВАННЯМ ФОРМУЛИ КІРХГОФА ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАГЕРРА

А. Глова, С. Літинський, Ю. Музичук, А. Музичук

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: a.hlova@gmail.com, s.litynsky@gmail.com,
yuriy.muzychuk@gmail.com, anatol.muzychuk@gmail.com*

Розглянуто зовнішні початково-крайові задачі Діріхле та Робіна для однорідного хвильового рівняння з однорідними початковими умовами у тривимірній за просторовими координатами області. Використовуючи подання розв'язків у вигляді формули Кірхгофа, ці задачі зведено до відповідних нестационарних граничних інтегральних рівнянь (ЧГІР) з невідомими даними Коші на граничній поверхні. У випадку задачі Діріхле маємо одне нестационарне інтегральне рівняння з невідомою нормальною похідною розв'язку задачі, а для задачі Робіна – систему з двох ЧГІР стосовно обох даних Коші. У результаті застосування до згаданих ЧГІР перетворення Лагерра за часовою змінною і перегруповання відповідних коефіцієнтів Фур'є-Лагерра отримано нескінченні послідовності граничних інтегральних рівнянь (ГІР), які залежать лише від координат на граничній поверхні. Усі ГІР, які отримані із задачі Діріхле, подано тим самим еліптичним граничним оператором у лівій частині рівнянь та рекурентно залежними виразами у правих частинах. У випадку задачі Робіна структура отриманої послідовності подібна, але тепер маємо справу з матричним оператором, який складений з чотирьох граничних операторів та є еліптичним у деякому просторі Соболева. Для чисельного розв'язування ГІР розроблено швидкий метод граничних елементів як реалізацію методу Гальоркіна. Невідомі сліди і нормальні похідні розв'язків апроксимовано лінійними та кусково-сталими базисними функціями, відповідно. Щоб зменшити необхідні обчислювальні ресурси, використали адаптивну перехресну апроксимацію дискретизованих граничних операторів. Проведено серії обчислювальних експериментів із чисельного розв'язування модельних задач Діріхле та Робіна. Їхні результати демонструють високу точність і швидкість збіжності запропонованого методу.

Ключові слова: початково-крайова задача Діріхле, початково-крайова задача Робіна, однорідне хвильове рівняння, формула Кірхгофа, поверхневі потенціали із запізненням, перетворення Лагерра, граничні інтегральні рівняння із запізненням, метод Гальоркіна, швидкий метод граничних елементів, адаптивна перехресна апроксимація, дискретні граничні оператори.

1. ВСТУП

Потенціали з запізненням простого та подвійного шару, а також їхня комбінація у вигляді формули Кірхгофа є зручними поданнями розв'язків початково-крайових задач для хвильового рівняння (ПКЗ) в теоретичних і прикладних дослідженнях [5, 21]. Безумовною перевагою їхнього використання є простий спосіб переходу до еквівалентних інтегральних рівнянь із запізненням (ЧГІР), розмірність яких є на одиницю меншою, ніж у вихідних ПКЗ. Однак у випадку тривимірних за просторовими координатами ПКЗ рівень обчислювальної складності відповідних ЧГІР і надалі залишається високим і потребує ретельного вибору способу чисельного

розв'язування. Ґрунтовний огляд літератури стосовно цієї проблеми див., наприклад, [9, 14].

Для знаходження розв'язків згаданих вище ПКЗ і відповідних ЧГР у досить широких функційних просторах один з ефективних підходів полягає у поєднанні перетворення Лаґерра (ПЛ) з методом граничних елементів (МГЕ). Зокрема, якщо у випадку задачі Діріхле подати її розв'язок через потенціал із часовим запізненням простого шару, а в задачі Неймана – подвійного, то за допомогою ПЛ з відповідних ЧГР можна отримати послідовності ГР з еліптичними граничними операторами [14, 15].

До аналогічних послідовностей ГР також можна прийти іншим шляхом, який складається з двох етапів. Перший полягає у застосуванні ПЛ безпосередньо до ПКЗ, його результатом є крайова задача для нескінченної трикутної системи еліптичних рівнянь. На другому етапі можна скористатися спеціальним інтегральним поданням розв'язку отриманої крайової задачі і з врахуванням крайових умов отримати нескінченну послідовність відповідних ГР [2, 9, 11, 18, 19]. Зазначимо також, що з ПЛ можна успішно поєднувати і інші методи. Зокрема, коли геометрія області є такою, що розв'язки отриманих в результаті ПЛ крайових задач можна побудувати з замкнутому вигляді (див. [1, 3], а також наведені там посилання).

Отож, з погляду прикладного застосування обидва шляхи зведення ПКЗ до послідовності ГР виявилися еквівалентними. Зауважимо, що у випадку побудови розв'язків у вигляді потенціалів із запізненням вдалося використати відомі властивості розв'язків хвильового рівняння [6, 7, 21] і довести еквівалентність ПКЗ Діріхле та Неймана й отриманих послідовностей ГР у відповідних просторах Соболева [14, 15].

Важливою для чисельного розв'язування властивістю отриманих послідовностей ГР є той факт, що кожному невідому функцію шукають з рівнянь, які відрізняються між собою лише правими частинами. Це дає змогу будувати ефективні методи для їхнього розв'язування, зокрема для тривимірних за просторовою змінною задач виявилися вдалими реалізації МГЕ у прямому та непрямому підходах [4, 9, 11, 14, 15, 17, 18].

Інша важлива властивість зумовлена виглядом матриць, які виникають у процесі дискретизації інтегральних рівнянь. Як свідчать результати, отримані в [11] стосовно задачі Діріхле, врахування цієї властивості за допомогою адаптивної перехресної апроксимації (АСА) [8, 10] матриць значно скорочує час і обсяг використаної пам'яті для знаходження чисельного розв'язку. Тому мета нашої праці, окрім інших прикладних аспектів, – застосування АСА до матриць, які виникають у задачах Діріхле та Робіна для хвильового рівняння у разі застосування швидкого методу граничних елементів.

Наша праця, окрім вступу та висновків, складається з чотирьох розділів. У перших трьох розділах описано основні кроки побудови розв'язків і введено співвідношення швидкого МГЕ для їхнього обчислення. Зокрема, у першому розділі сформульовано початково-крайові задачі для однорідного хвильового рівняння з крайовими умовами Діріхле та Робіна, зведено їх до інтегральних рівнянь і систем із так званим часовим запізненням. У другому розділі дано означення перетворення Лаґерра, з допомогою якого нестационарні інтегральні рівняння замінено нескінченними послідовностями ГР та інтегральних систем, побудовано аналоги формул Ґріна для коефіцієнтів Фур'є-Лаґерра розв'язків нестационарних задач та отримано їх наближення у вигляді частинних сум розвинення Фур'є-Лаґерра. У третьому

розділі виведено основні співвідношення МГЕ, розглянуто адаптивну перехресну апроксимацію дискретних граничних операторів. У завершальному розділі на модельних прикладах продемонстровано апостеріорні похибки чисельних розв’язків, розглянуто дифракцію сферичного імпульсу на кубі з акустично м’якою поверхнею.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ І ВИВЕДЕННЯ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЧАСОВОЇ ЗМІННОЇ

Нехай Ω^- – обмежена область в \mathbb{R}^3 з ліпшицевою компактною межею Γ , $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$, $\nu(x)$ – одиничний вектор нормалі до поверхні Γ у точці $x \in \Gamma$, спрямованої в Ω . Позначимо також $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $Q := \Omega \times \mathbb{R}_+$ і $\Sigma := \Gamma \times \mathbb{R}_+$.

Розглянемо однорідне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \Delta u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

де $\Delta = \sum_{i=1}^3 \partial^2 / \partial x_i^2$ – оператор Лапласа. Будемо шукати функцію $u(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння (1), однорідні початкові умови

$$u(x, 0) = 0, \quad \partial_t u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

та одну з таких крайових умов:

– умова Діріхле:

$$u(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma; \quad (3)$$

– умова Робіна

$$\partial_{\nu(x)} u(x, t) - b(x) \partial_t u(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma. \quad (4)$$

У кожній з умов (3) і (4) під g розуміємо задану на Σ функцію (функціонал), ∂_t і $\partial_{\nu(x)}$ – позначення похідної за часовою змінною і нормальною похідною в точці $x \in \Gamma$, відповідно, а стосовно заданої імпедансної функції b поверхні Γ припускаємо, що $b(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma$. Зауважимо, що для достатньо гладких функцій u та поверхні Γ нормальну похідну можна задати за допомогою скалярного добутку

$$\partial_{\nu(x)} u(x, \cdot) = \nu(x) \cdot \nabla_x u(x, \cdot),$$

де ∇_x – оператор градієнта, в якому частинні похідні за просторовими координатами обчислюють у точці x .

Надалі будемо називати задачу (1)–(3) задачею Діріхле, а задачу (1), (2), (4) – задачею Робіна. Умови, за яких розв’язок кожної з цих задач існує та є єдиним у відповідних просторах Соболева, досліджено в [14, 21]. Вважаючи, що ці умови дотримано, будемо шукати розв’язки задач за формулою Кірхгофа

$$u(x, t) = -(\mathcal{S}\mu)(x, t) + (\mathcal{D}\lambda)(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (5)$$

яка складається з потенціалів із запізненням, відповідно, простого шару

$$(\mathcal{S}\mu)(x, t) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(y, t - |x - y|)}{|x - y|} d\Gamma_y, \quad (x, t) \in \overline{Q}, \quad (6)$$

і подвійного

$$(\mathcal{D}\lambda)(x, t) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \nu(y) \cdot \nabla_y \left(\frac{\lambda(z, t - |x - y|)}{|x - y|} \right) \Big|_{z=y} d\Gamma_y, \quad (x, t) \in Q. \quad (7)$$

Тут через $\lambda(\cdot, t) := \gamma_0 u(\cdot, t)$ і $\mu(\cdot, t) := \gamma_1 u(\cdot, t)$ позначено дані Коші розв'язку на поверхні Γ у довільний момент часу $t \in \mathbb{R}_0$, γ_0 і γ_1 – оператори сліду і нормальної похідної, відповідно. Принагідно зауважимо, що підхід до побудови розв'язку задачі за формулою (5), де густини потенціалів є даними Коші цього розв'язку, називають прямим, а альтернативний з використанням лише одного з потенціалів – непрямым [13].

Відомо, що обидва потенціали \mathcal{S} і \mathcal{D} у разі виконання певних умов стосовно густин задовольняють поточково [5] чи в сенсі розподілів [13] однорідне хвильове рівняння та однорідні початкові умови. Тому залишається знайти такі густини, щоб подання (5) задовольняло і потрібну крайову умову. Для цього побудуємо відповідні інтегральні рівняння.

Отож, спрямуємо у формулі (5) точку спостереження x на межу області. Ввівши позначення $\mathcal{V} := \gamma_0 \circ \mathcal{S}$ і враховуючи відоме співвідношення стрибка для потенціалу подвійного шару $\gamma_0 \circ \mathcal{D} = \frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}$, де \mathcal{I} – оператор ідентичності та

$$(\mathcal{K}\lambda)(x, t) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \nu(y) \cdot \nabla_y \left(\frac{\lambda(y, t - |x - y|)}{|x - y|} \right) d\Gamma_y, \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (8)$$

отримаємо в довільний момент часу $t \in \mathbb{R}_0$ таке інтегральне співвідношення:

$$\mathcal{V}\mu + \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K} \right) \lambda = 0 \quad \text{на } \Sigma. \quad (9)$$

Звідси у випадку задачі Діріхле, коли $\lambda = g$ і є відомою функцією, отримаємо інтегральне рівняння

$$\mathcal{V}\mu = -\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K} \right) g \quad \text{на } \Sigma \quad (10)$$

стосовно невідомої функції μ . Дотримуючись [14], де до чисельного розв'язування задачі Діріхле застосували непрямий підхід, можна довести еквівалентність цієї задачі та інтегрального рівняння (10) у певних просторах Соболева.

У випадку задачі Робіна невідомими є слід і нормальна похідна розв'язку. Крім того, наявність у крайовій умові (4) похідної $\partial_t u$ ускладнює вигляд інтегрального рівняння, яке можна отримати внаслідок безпосередньої підстановки виразу (5) у крайову умову. Тому далі поряд з крайовою умовою (4) будемо розглядати таку систему інтегральних співвідношень:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{V} & \frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K} \\ \frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}' & -\mathcal{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{на } \Sigma, \quad (11)$$

або її модифікований варіант

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{V} & \mathcal{K} \\ -\mathcal{K}' & -\mathcal{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Перша рівність – це переписане в дещо іншому вигляді співвідношення (9), а друга є нормальною похідною розв’язку задачі, отриманою з формули (5) з використанням стрибка нормальної похідної потенціалу простого шару $\gamma_1 \circ \mathcal{S} = -\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}'$, де

$$(\mathcal{K}'\mu)(x, t) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(x) \cdot \nabla_x \left(\frac{\mu(y, t - |x - y|)}{|x - y|} \right) d\Gamma_y, \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (13)$$

а граничний оператор $\mathcal{W} := -\gamma_1 \circ \mathcal{D}$ визначений так:

$$(\mathcal{W}\lambda)(x, t) := \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{\nu}(x) \cdot \lim_{\Omega \ni x' \rightarrow x} \nabla_{x'} \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla_y \left(\frac{\lambda(z, t - |x' - y|)}{|x' - y|} \right) \Big|_{z=y} d\Gamma_y. \quad (14)$$

3. ВИВЕДЕННЯ НЕСКІНЧЕННИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ГІР ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАҒЕРРА

Наступний крок – перехід за допомогою ПЛ від отриманих нестационарних інтегральних рівнянь і співвідношень до еквівалентних послідовностей співвідношень, які не залежать від часової змінної. Для цього використовуватимемо перетворення Лаґерра, визначене в [14], яке тут дещо модифікуємо за рахунок масштабуючих параметрів.

Нехай X – довільний Банахів простір із заданою нормою $\|\cdot\|_X$. Розглянемо простір Лебега $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$, елементами якого є векторнозначні функції $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, що задовольняють умову

$$\int_{\mathbb{R}_+} \|v(t)\|_X^2 e^{-\alpha t} dt < \infty,$$

де $\alpha > 0$, а також простір послідовностей

$$l^2(X) := \left\{ \mathbf{v} \in X^\infty \mid \sum_{j=0}^{\infty} \|v_j\|_X^2 < +\infty \right\}.$$

Як базис у цьому просторі використовуватимемо функції Лаґерра

$$l_n(t) = \sqrt{\sigma} L_n(\sigma t) e^{-\frac{\beta}{2}t}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (15)$$

де L_k , $k \in \mathbb{N}_0$, – поліноми Лаґерра; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, \mathbb{N} – множина натуральних чисел; $\sigma > 0$ і $\beta \geq 0$ – параметри. Можна довести, що за $\sigma = \alpha + \beta$ послідовність (15) є ортонормованим базисом у просторі $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$. Величини σ і β у визначенні (15) відіграють роль параметрів масштабування у розвиненнях Фур’є-Лаґерра. Їхні значення вибирають з певних міркувань для знаходження чисельного розв’язку на підставі властивостей вхідних даних g .

Під ПЛ будемо розуміти відображення $\mathcal{L} : L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow l^2(X)$, яке довільній функції $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$ ставить у відповідність послідовність $\mathbf{f} := (f_0, f_1, \dots, f_k, \dots)^\top \in l^2(X)$ за формулою

$$f_k := (\mathcal{L}f)_k := \int_{\mathbb{R}_+} f(t) l_k(t) e^{-\alpha t} dt, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (16)$$

ПЛ є бієктивним, а відображення, яке довільну послідовність $\mathbf{h} := (h_0, h_1, \dots, h_k, \dots)^\top \in l^2(X)$ переводить у функцію h за правилом

$$(\mathcal{L}^{-1}\mathbf{h})(t) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k l_k(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (17)$$

є його оберненим перетворенням $\mathcal{L}^{-1} : l^2(X) \rightarrow L^2_\alpha(\mathbb{R}_+; X)$.

Дотримуючись [14], отримуємо такі розвинення компонентів граничних співвідношень (10) і (12):

$$(\mathcal{V}\mu)(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j (V_{j-i}\mu_i)(x) \right) l_j(t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}_+; \quad (18)$$

$$(\mathcal{K}\lambda)(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j (K_{j-i}\lambda_i)(x) \right) l_j(t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}_+; \quad (19)$$

$$(\mathcal{K}'\mu)(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j (K'_{j-i}\mu_i)(x) \right) l_j(t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}_+; \quad (20)$$

$$(\mathcal{W}\lambda)(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j (W_{j-i}\lambda_i)(x) \right) l_j(t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (21)$$

Тут використано позначення $\mu_k := (\mathcal{L}\mu)_k$, $\lambda_k := (\mathcal{L}\lambda)_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, а також

$$\begin{aligned} (V_k\xi)(x) &:= \int_{\Gamma} \xi(y) e_k(x-y) d\Gamma_y, \\ (K_k\xi)(x) &:= \int_{\Gamma} \xi(y) \nu(y) \cdot \nabla_y e_k(x-y) d\Gamma_y, \\ (K'_k\xi)(x) &:= \int_{\Gamma} \xi(y) \nu(x) \cdot \nabla_x e_k(x-y) d\Gamma_y, \\ (W_k\xi)(x) &:= \nu(x) \cdot \lim_{x' \rightarrow x} \nabla_{x'} \int_{\Gamma} \xi(y) \nu(y) \cdot \nabla_y e_k(x-y) d\Gamma_y, \end{aligned} \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} e_0(z) &:= \frac{e^{-\gamma|z|}}{4\pi|z|} l_0(|z|), \quad e_k(z) := \frac{e^{-\gamma|z|}}{4\pi|z|} (l_k(|z|) - l_{k-1}(|z|)), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \gamma &:= \alpha + \beta/2, \quad \text{при } z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Тепер, враховуючи відповідні розвинення, з інтегрального рівняння (10) отримуємо за допомогою ПЛ таку нескінченну систему ГПР:

$$\sum_{i=0}^k V_{k-i}\mu_i = -\frac{1}{2}g_k + \sum_{i=0}^k K_{k-i}g_i; \quad \text{на } \Gamma, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (24)$$

де $g_k := (\mathcal{L}g)_k$. Легко бачити, що ця система є трикутною, тому її можна переписати у вигляді послідовності таких ГІР

$$V_0\mu_k = -\frac{1}{2}g_k + \sum_{i=0}^k K_{k-i}g_i - \sum_{i=0}^{k-1} V_{k-i}\mu_i; \quad \text{на } \Gamma, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (25)$$

Тут і далі у правих частинах співвідношень вирази з підсумовуванням вважаємо такими, що дорівнюють нулеві, якщо кінцеве значення індексу підсумовування є більшим початкового.

Стосовно системи (12) спочатку зауважимо, що з крайової умови (4) після застосування ПЛ отримуватимемо послідовність співвідношень

$$\mu_k - b\sigma \sum_{i=0}^k \lambda_i = g_k \quad \text{на } \Gamma, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (26)$$

Тепер, подібно до попереднього випадку і враховуючи (26), зведемо нестационарну систему (12) до такої нескінченної послідовності систем ГІР:

$$A_0 \begin{pmatrix} \mu_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_k \end{pmatrix} - \sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i} \begin{pmatrix} \mu_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} \quad \text{на } \Gamma, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (27)$$

де матричні оператори набувають вигляду

$$A_0 := \begin{pmatrix} V_0 & \left(\frac{1}{2}I - K_0\right) \\ \left(-\frac{1}{2}I + K'_0\right) & (b\sigma I + D_0) \end{pmatrix}, \quad A_j := \begin{pmatrix} V_j & -K_j \\ K'_j & (B_j + D_j) \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Зауважимо, що ГІР (25) для визначення кожної з невідомих μ_k , $k \in \mathbb{N}_0$, відрізняються лише рекурентно залежними правими частинами, а граничний оператор V_0 є тим самим для усіх рівнянь. У випадку задачі Робіна рівняння (27) дещо складніше, оскільки його оператор A_0 є матричним і складається з чотирьох граничних операторів. Вони на кожному кроці формують систему двох інтегральних рівнянь стосовно пари невідомих (μ_k, λ_k) , $k \in \mathbb{N}_0$. Але загалом маємо аналогічну (25) рекурентну структуру. Цей факт є важливим для побудови ефективного алгоритму чисельного розв'язування цих рівнянь.

Отож, зафіксувавши натуральне число N , з послідовностей ГІР (25) і (27) можна отримати значення перших $N + 1$ коефіцієнтів Фур'є-Лагерра $\boldsymbol{\mu}^N := (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N)^\top$ і $\boldsymbol{\lambda}^N := (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N)^\top$ для тих даних Коші, які невідомі відповідній задачі. Це дає змогу знаходити компоненти такої послідовності $\mathbf{u}^N := (u_0, u_1, \dots, u_N)^\top$ за формулою

$$u_k(x) = - \sum_{i=0}^k (S_{k-i}\mu_i)(x) + \sum_{i=0}^k (D_{k-i}\lambda_i)(x), \quad x \in \Omega, \quad k \in [0, N], \quad (29)$$

де $S_k := \mathcal{L}_k(\mathcal{S})$ і $D_k := \mathcal{L}_k(\mathcal{D})$. Легко бачити, що ця формула є результатом перетворення формули Кірхгофа (5). У [19] доведено, що вона є аналогом формули Гріна для системи із перших $N + 1$ еліптичних рівнянь згаданої вище нескінченної

трикутної системи. Застосовуючи тепер обернене ПЛ (17), отримаємо наближений розв'язок вихідної початково-крайової задачі

$$\tilde{u}^N(x, t) := \sum_{k=0}^N u_k(x) l_k(t), \quad (x, t) \in Q. \quad (30)$$

Отож, знаходження розв'язків послідовності ГІР (25) чи (27) є ключовим етапом розв'язування відповідної ПКЗ.

4. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ТА АДАПТИВНА ПЕРЕХРЕСНА АПРОКСИМАЦІЯ ГРАНИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ

Чисельно розв'язувати послідовності ГІР (25) і (27) будемо методом граничних елементів (МГЕ). Можна довести (див., наприклад, [14]), що оператор V_0 є еліптичним (у просторі, спряженому до простору слідів), тому чисельні розв'язки ГІР (25) можна знаходити за допомогою методу Гальоркіна. Ефективність його реалізації у вигляді МГЕ демонструють, зокрема, результати серії обчислювальних експериментів у [2, 11], де був використаний непрямий підхід до розв'язування тривимірних за просторовими координатами задач Діріхле. Матричний граничний оператор A_0 також є еліптичним у спеціальному просторі [18, 19], тому і в цьому випадку є підстави для ефективного використання МГЕ для знаходження послідовності пар (μ_k, λ_k) .

Для реалізації МГЕ-Гальоркіна скористаємося базисами, які складаються з кусково сталих та лінійних функцій для наближення густин μ і λ , відповідно. На підставі дискретизації граничних операторів V_j , K_j , K'_j і W_j отримаємо матриці \mathbf{V}_j^h , \mathbf{K}_j^h , \mathbf{K}'_j^h і \mathbf{W}_j^h , відповідно. Тут h – параметр дискретизації, пов'язаний з кількістю M граничних трикутних елементів, якими апроксимуємо поверхню Γ . Будемо апроксимувати функції μ_k кусково-сталими функціями $\{\varphi_l^0\}_{l=1}^M$

$$\mu_k^h = \sum_{l=1}^M \mu_{k,l}^h \varphi_l^0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (31)$$

де $\{\mu_{k,l}^h\}_{l=1}^M =: \boldsymbol{\mu}_k^h \in \mathbb{R}^M$ – вектор невідомих коефіцієнтів.

У випадку ГІР (25) функції $\lambda_k = g_k$ відомі, наблизимо їх лінійними функціями $\{\varphi_l^1\}_{l=1}^{M^*}$

$$\lambda_k^h = \sum_{l=1}^{M^*} \lambda_{k,l}^h \varphi_l^1, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (32)$$

Тут $\{\lambda_{k,l}^h\}_{l=1}^{M^*} =: \boldsymbol{\lambda}_k^h \in \mathbb{R}^{M^*}$ – відомі коефіцієнти апроксимації; M^* – кількість лінійних базисних функцій. Тоді з ГІР (25) за допомогою МГЕ-Гальоркіна отримаємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР):

$$\mathbf{V}_0^h \boldsymbol{\mu}_k^h = -\frac{1}{2} \mathbf{M}^h \mathbf{g}_k^h + \sum_{i=0}^k \mathbf{K}_{k-i}^h \mathbf{g}_i^h - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{V}_{k-i}^h \boldsymbol{\mu}_i^h, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (33)$$

Тут \mathbf{M}^h – матриця, елементами якої є попарні скалярні добутки функцій з базисів апроксимації μ_k і g_k . Якщо послідовно знайти $N + 1$ розв'язків цієї системи,

рекурентно перераховуючи вирази у її правій частині, то після підстановки відповідних наближень μ_k і g_k у формулу (29) можемо обчислювати наближені значення коефіцієнтів Фур'є-Лагерра

$$u_k^h(x) = - \sum_{i=0}^k (S_{k-i} \mu_i^h)(x) + \sum_{i=0}^k (D_{k-i} \lambda_i^h)(x), \quad x \in \Omega, \quad k \in [0, N], \quad (34)$$

а також значення чисельного розв'язку задачі Діріхле

$$\tilde{u}^{N,h}(x, t) := \sum_{k=0}^N u_k^h(x) l_k(t), \quad (x, t) \in Q. \quad (35)$$

Оскільки в послідовності систем ГІР (27) функції μ_k і λ_k , $k \in \mathbb{N}_0$, є невідомими, то для апроксимації їх за формулами (31) і (32), відповідно, треба знаходити два набори коефіцієнтів μ_k^h і λ_k^h , по $N + N^*$ невідомих для кожного значення k . При формуванні за схемою МГЕ-Гальоркіна дискретного аналогу для оператора A_0 , який визначає систему (27), для першого рівняння цієї системи у ролі пробних функцій будемо використовувати кусково-сталі базисні функції, а для другого – лінійні, тобто всього $N + N^*$ пробних функцій. Після послідовного розв'язування відповідних СЛАР наближення густин μ_k^h і λ_k^h також підставляємо у формулу (34), а чисельний розв'язок задачі Робіна обчислюємо за формулою (35).

Зазначимо, що матриці \mathbf{V}_j^h , \mathbf{K}_j^h , $\mathbf{K}_j'^h$ і \mathbf{W}_j^h повністю заповнені, і під час обчислення їхніх елементів треба враховувати сингулярність функцій (23), які разом з їхніми похідними задають ядра граничних операторів. Виведення розрахункових формул для обчислення таких елементів детально викладено в працях [2, 11, 15, 18].

Обчислення елементів згаданих вище матриць полягає у повторному інтегруванні за граничними елементами, тому формування таких матриць становить значну частину від усього часу розв'язування задач. Крім того, за великої кількості граничних елементів зберігання послідовності таких матриць потребує значних ресурсів пам'яті. Один з універсальних підходів, який дає змогу ефективніше використовувати обчислювальні ресурси, – адаптивна перехресна апроксимація (АСА) [10] матриць. Суть АСА полягає у наближенні окремих прямокутних блоків елементів матриці добутком двох матриць меншого рангу, які під час обчислення зберігають у вигляді так званих ієрархічних \mathcal{H} -матриць [10].

Умовою застосування АСА до поверхневих потенціалів з ядром $K(x, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{x\})$ є виконання для всіх $x \in \mathbb{R}^3$ такої нерівності [8, розд. 3.4.2]:

$$|\partial_y^\alpha K(x, y)| \leq c_p |x - y|^{g-p}, \quad p = |\alpha|, \quad (36)$$

для всіх мультиіндексів $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$, де $g < 0$ – деяка стала. Легко бачити, що функції (23) задовольняють цю умову, коли точки x і y належать різним граничним елементам. На практиці ті елементи матриці, які відповідають сусіднім або граничним елементам, які збігаються, обчислюють і зберігають, а серед інших на підставі деяких критеріїв виділяють у матриці так звані допустимі блоки, до яких і застосовують АСА.

Метод АСА стосовно допустимого блоку $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ зводиться до обчислення елементів $\mathbf{Q}[i, j]$ лише для деякої частини його рядків і стовпців. Отримані значення зберігають у двох векторних послідовностях $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \dots, \mathbf{a}_p$ та $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r, \dots, \mathbf{b}_p$,

де $p \leq \min(m, n)$, формуючи їх покровоко. На кожному r -му кроці матрицю

$$\mathbf{S}_r := \sum_{l=1}^r \mathbf{a}_l \mathbf{b}_l^\top, \quad r \leq p \quad (37)$$

тракуємо як чергове наближення вихідної матриці \mathbf{Q} , вважаючи, що $\mathbf{Q} = \mathbf{S}_r + \mathbf{R}_r$, де \mathbf{R}_r – похибка наближення, причому $\text{rank}(\mathbf{S}_r) \leq r$. Оскільки $\mathbf{S}_r = \mathbf{S}_{r-1} + \mathbf{a}_r \mathbf{b}_r^\top$, то за наперед заданого значення $\varepsilon > 0$ виконання нерівності

$$\|\mathbf{a}_r\|_2 \|\mathbf{b}_r\|_2 \leq \varepsilon \|\mathbf{S}_r\|_F \quad (38)$$

тракуватимемо як умову зупинки рекурентного процесу наближення матриці \mathbf{Q} . Тут $\|\mathbf{a}_r\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{n_r} (\mathbf{a}_r[j])^2 \right)^{1/2}$ і $\|\mathbf{Q}\|_F := \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\mathbf{Q}[i, j])^2 \right)^{1/2}$ – векторна Евклідова (n_r – кількість елементів у векторі \mathbf{a}_r) і матрична Фробеніуса норми, відповідно.

Отже, застосовуючи метод АСА (за формулою (37)) до блока \mathbf{Q} , який складається з $N_Q := m \times n$ елементів, треба зберігати всього $N_S := r(m + n)$ значень, що за малих значень r може бути суттєво меншим, ніж величина N_Q . Припустивши пропорційну залежність $m = c \cdot n$, де $c > 0$ – деяка стала, за незмінного r матимемо оцінки $N_Q = O(n^2)$ і $N_S = O(n)$ для зазначених вище обсягів пам'яті. Якщо вважати кількість алгебричних операцій для обчислення одного елемента матриці $\mathbf{Q}[i, j]$ незалежною від значень його індексів, то отримані вище оцінки характеризуватимуть також кількість таких операцій для формування всього блоку \mathbf{Q} і його наближення \mathbf{S}_r , відповідно.

Зауважимо, що у випадку зазначених вище припущень щодо розмірів блоку \mathbf{Q} обчислення матрично-векторного добутку $\mathbf{Q}\mathbf{x}$ приводить до виконання $O(n^2)$ алгебричних операцій, тим часом добуток $\mathbf{S}_r \mathbf{x}$ – лише до $O(n)$. Така властивість дає змогу використовувати з АСА ефективні алгоритми розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь, наприклад, ітераційний метод узагальнених мінімальних не-в'язок з перезапусками *GMRES* [20].

5. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Продемонструємо розглянутий вище підхід до чисельного розв'язування модельних задач Діріхле та Робіна ззовні куба $\Omega^- := \{(x, y, z) : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$, тобто коли $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega^-$. Для генерування граничних даних будемо використовувати сім'ю функцій

$$w(x, t) := \frac{w^*(t - |x| + 1)}{|x|} \vartheta(t - |x| + 1), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_0, \quad (39)$$

де під функцією w^* будемо розуміти кубічний В-сплайн, а під ϑ – функцію Хевісайда. Відомо (див., наприклад, [5]), що функції w задовольняють однорідне хвильове рівняння й однорідні початкові умови. Якщо ж задати в крайовій умові (3) $g(x, t) := w(x, t)$, а в (4) – $g(x, t) := -\partial_{\nu(x)} w(x, t) + b(x) \partial_t w(x, t)$, то функція $u := w$ буде розв'язком задач Діріхле та Робіна, відповідно. Надалі називатимемо його аналітичним (точним) і використовуватимемо для оцінки апостеріорних похибок чисельних розв'язків, обчислених за формулою (35).

Спочатку розглянемо приклади, які демонструють збіжність запропонованого методу зі збільшення кількості граничних елементів. Почнемо з задачі Робіна, оскільки чисельні розв'язки задач Діріхле, отримані прямим МГЕ, практично збігаються з результатами, які отримали в [11, Приклад 5.1] непрямим МГЕ з використанням потенціалу з запізненням простого шару.

Приклад 1. Для різних значень параметра імпедансу b знайти в Ω значення функції u_0^h – коефіцієнта Фур'є-Лагерра чисельного розв'язку задачі Робіна, розглядаючи розбиття поверхні куба на граничні елементи для послідовності значень M , а також дослідити апостеріорну похибку і швидкість збіжності $u_0^h(x)$.

Оскільки для сферичного імпульсу нескладно визначити відповідні коефіцієнти Фур'є-Лагерра, то будемо використовувати їх як аналітичні розв'язки u_k для знаходження апостеріорних похибок чисельних розв'язків u_k^h

$$\delta_k^h := \|u_k^h - u_k\|_{L^2(\Omega_{a,b})}, \quad \epsilon_k^h := \delta_k^h / \|u_k\|_{L^2(\Omega_{a,b})} * 100 \%, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (40)$$

Тут під $\Omega_{a,b}$ розуміємо деякий відрізок з кінцями в точках a і b , вздовж якого розміщуються точки спостереження. Крім того, нас буде цікавити величина передбачуваного порядку збіжності (estimated order of convergence)

$$eoc_k := \frac{\ln(\delta_k^{h_{j-1}} / \delta_k^{h_j})}{\ln(h_{j-1} / h_j)}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (41)$$

де h_{j-1} і h_j – параметри двох послідовних розбиттів граничної поверхні на граничні елементи.

Таблиця 1

Аналіз збіжності для u_0 при різних M і b

M	$b = 0.25$			$b = 1$			$b = 16$		
	δ_0	eoc_0	ϵ_0	δ_0	eoc_0	ϵ_0	δ_0	eoc_0	ϵ_0
768	$4.69 \cdot 10^{-5}$		0.50	$4.67 \cdot 10^{-5}$		0.50	$4.81 \cdot 10^{-5}$		0.51
1200	$3.50 \cdot 10^{-5}$	1.32	0.37	$3.43 \cdot 10^{-5}$	1.39	0.36	$3.41 \cdot 10^{-5}$	1.54	0.36
2028	$2.53 \cdot 10^{-5}$	1.23	0.27	$2.45 \cdot 10^{-5}$	1.28	0.26	$2.38 \cdot 10^{-5}$	1.37	0.25

Похибки чисельних розв'язків u_0^h , отриманих при $\alpha = 0.5$ і $\beta = 3.5$ для різних розбиттів поверхні куба на граничні елементи подано в табл.1. Як бачимо, зі збільшенням величини M похибки зменшуються і їхня величина та швидкість збіжності eoc_0 практично не залежить від значення параметра імпедансу.

Приклад 2. Для задачі прикладу 1 при значенні параметра імпедансу $b = 1$ знайти кількість елементів матриць дискретизованих граничних операторів, значення яких будуть обчислені і збережені в пам'яті у разі застосування АСА (швидкий МГЕ), у відсотках від кількості відповідних елементів без застосування АСА (звичайний МГЕ).

На рис. 1 зображено графіки, які демонструють кількість елементів у відповідних матрицях у разі застосування швидкого ($\varepsilon = 0.01$ і $\varepsilon = 0.001$) і звичайного ($\varepsilon = 0$) МГЕ. Як бачимо, застосування АСА у швидкому методі приводить до квазілінійної залежності кількості елементів, які обчислюють, від параметра M . Для матриці V_0^h у значеннях $M > 1200$ їх суттєво менше, ніж елементів у випадку звичайного

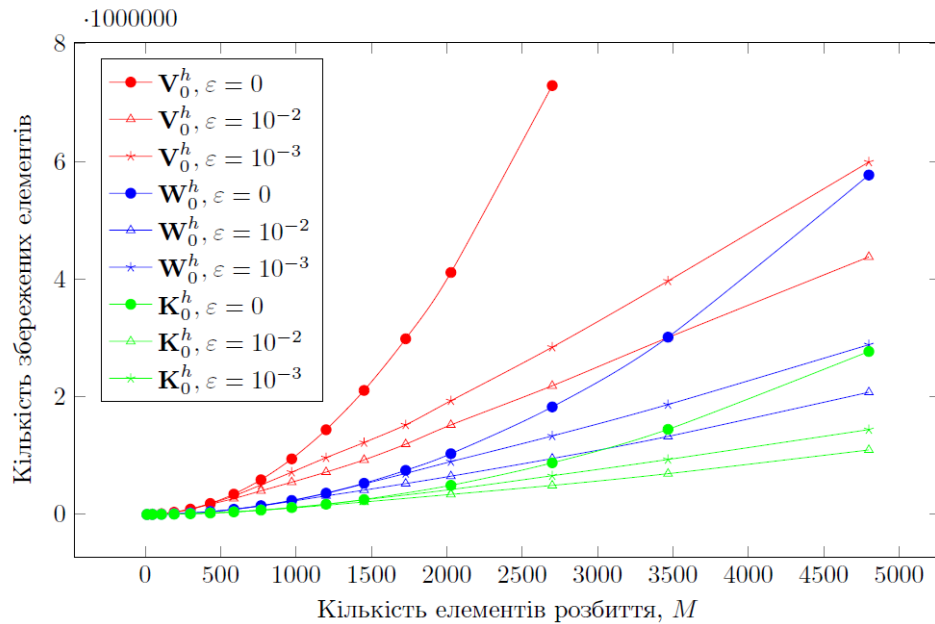


Рис. 1. Кількість збережених елементів у матрицях \mathbf{V}_0^h , \mathbf{W}_0^h та \mathbf{K}_0^h залежно від кількості граничних елементів у разі застосування звичайного ($\varepsilon = 0$) і швидкого МГЕ з різними значеннями параметра ε

МГЕ, коли їх M^2 штук. Як видно з графіка, у менших значеннях M витрати часу на пошук допустимих блоків співрозмірні з ефектом економії від застосування АСА. Зауважимо, що за фіксованого значення параметра M , який задає розбиття поверхні куба на граничні елементи, значення параметра $M^* < M$. Відповідно і розмір матриці \mathbf{W}_0^h є меншим, ніж у \mathbf{V}_0^h , але застосування АСА також приводить до економії пам'яті, витрати якої також квазілінійні стосовно M . Теж саме спостерігаємо і для матриці \mathbf{K}_0^h та спряженої до неї. Оскільки від кількості елементів, які треба обчислити, залежить сумарний час формування матриць, то очевидними є переваги швидкого МГЕ і стосовно цього обчислювального ресурсу.

Приклад 3. Для різних значень параметра імпедансу b знайти в Ω значення чисельного розв'язку задачі Робіна, розглядаючи розбиття поверхні куба на граничні елементи для послідовності значень M , а також дослідити апостеріорну похибку і швидкість збіжності $\tilde{u}^{N,h}(x,t)$ порівняно з $\tilde{u}^N(x,t)$ при $N = 10$.

Таблиця 2

Аналіз збіжності для $\tilde{u}^{10,h}$ при різних M і b

M	$b = 0.25$			$b = 1$			$b = 16$		
	$\tilde{\delta}_0$	$\widetilde{e\delta c_0}$	$\tilde{\epsilon}_0$	$\tilde{\delta}_0$	$\widetilde{e\delta c_0}$	$\tilde{\epsilon}_0$	$\tilde{\delta}_0$	$\widetilde{e\delta c_0}$	$\tilde{\epsilon}_0$
768	$1.16 \cdot 10^{-3}$		0.23	$1.33 \cdot 10^{-3}$		0.26	$2.25 \cdot 10^{-3}$		0.44
1200	$9.26 \cdot 10^{-4}$	1.01	0.18	$1.00 \cdot 10^{-3}$	1.28	0.20	$1.83 \cdot 10^{-3}$	0.92	0.36

Розглянемо такі апостеріорні похибки нестационарних чисельних розв'язків

$$\tilde{\delta}^{N,h} := \|\tilde{u}^{N,h} - \tilde{u}^N\|_{L^2_{\sigma}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega_{a,b}))}, \quad \tilde{\epsilon}^{N,h} := \tilde{\delta}^{N,h} / \|\tilde{u}^N\|_{L^2_{\sigma}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega_{a,b}))} * 100 \%,$$

де під $\Omega_{a,b}$ розуміємо відрізок (без кінцевих точок) у просторі поза кубом. Також будемо обчислювати для послідовних значень параметра h величину

$$\tilde{\epsilon}^{ocN,h} := \frac{\ln(\tilde{\delta}^{N,h_{j-1}} / \tilde{\delta}^{N,h_j})}{\ln(h_{j-1} / h_j)}.$$

Із наведених у табл. 2 результатів бачимо, що зі згущенням сітки розбиття чисельний розв'язок $\tilde{u}^{N,h}$ прямує до аналітичного і у цьому випадку величини похибок і швидкість збіжності, як і в прикладі 1, не залежить від значення параметра імпедансу.

Приклад 4. Знайти чисельний розв'язок задачі Діріхле, яка описує дифракцію сферичного акустичного імпульсу з джерелом у точці $x^* = (2, 0, 0)$ на кубі з акустично м'якою поверхнею.

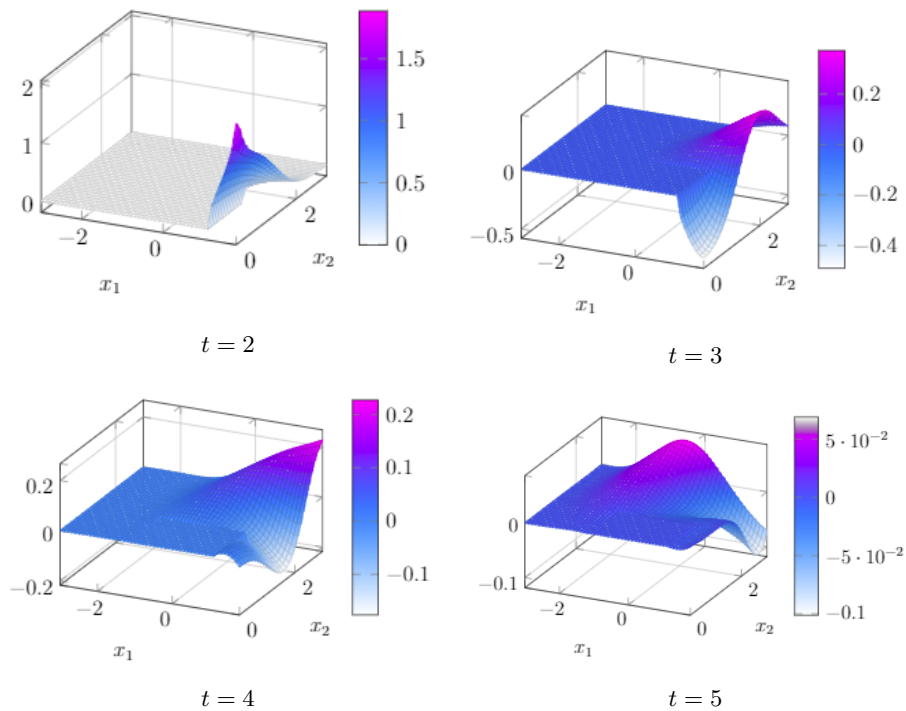


Рис. 2. Розв'язок $\tilde{u}^{N,h}(x,t)$ задачі Діріхле (приклад 4) в точках x на прямокутнику $(x_1, x_2) \in \Omega_{1,2} = (-3, 1.8) \times (0, 3)$ в площині $x_3 = 0$ у фіксовані моменти часу $t \in [2, 5]$

Оскільки джерело сферичного імпульсу

$$\tilde{w}(x, x^*, t) := \frac{w^*(t - |x - x^*| + 1)}{|x - x^*|} \vartheta(t - |x - x^*| + 1)$$

перебуває безпосередньо в області Ω , то в цьому випадку функція u^{tot} , яка описує його поширення, задовольняє неоднорідне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u^{tot}(x, t)}{\partial t^2} - \Delta u^{tot}(x, t) = \delta(x - x^*)\delta(t), \quad (x, t) \in Q, \quad (42)$$

і крайову умову $u^{tot} = 0$ на Σ . Відлік часу почнемо з моменту досягнення імпульсом поверхні куба. Подамо шукану функцію як суперпозицію $u^{tot} = u + \tilde{w}$, де u – згенероване поверхнею поле. Тоді стосовно функції u матимемо задачу Діріхле (1)–(3), коли $g = -\tilde{w}$ на Σ . Чисельний розв’язок цієї задачі знайдено за таких значень параметрів $\alpha = 0.5$, $\beta = 3.5$, $M = 768$. На рис. 2 зображено графіки дифрагованого імпульсу у різні моменти часу в площині $x_3 = 0$. Зазначимо, що на них добре спостерігаються такі фізичні аспекти: прихід збурення з часом у точки спостереження, занулення сліду сумарного імпульсу на поверхні куба та його зникання у міру віддалення від джерела.

6. ВИСНОВКИ

Подання розв’язків початково-крайових задач для хвильового рівняння у вигляді формули Кірхгофа дає змогу звести за допомогою перетворення Лагерра ці задачі до послідовностей граничних інтегральних рівнянь, які мають той самий еліптичний оператор у лівій частині та рекурентно залежні вирази правої частини. Порівняно з непрямим підходом, коли розв’язок подають лише одним з поверхневих потенціалів із запізненням, запропонований підхід дає змогу визначити повний комплект даних Коші відповідних розв’язків. Крім того, еліптичність згаданих граничних операторів забезпечує застосовність методу Гальборкіна для розв’язування отриманих ГІР. Специфічна будова ядер отриманих операторів дає змогу використати адаптивну перехресну апроксимацію у разі їхньої дискретизації та розробити варіант швидкого МГЕ. Результати серії обчислювальних експериментів на модельних задачах демонструють ефективність запропонованого підходу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Галазюк В. А. Метод поліномів Чебишева – Лагера в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами / В. А. Галазюк // Доп. АН УРСР. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
2. Музичук Ю. Про чисельне розв’язування внутрішніх крайових задач для нескінченних систем еліптичних рівнянь / Ю. Музичук // Вісник ЛНУ. Серія прикл. матем. та інформ. – 2013. – Вип. 20. – С. 49–56.
3. Опанасович В. К. Перехідний термонапружений стан у півсмузі з покриттям, зумовлений нагрівом її бічної поверхні / В. К. Опанасович, Г. Т. Сулим, І. М. Турчин, В. В. Хома // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – № 1 (58). – С. 132–142.
4. Пасичнык Р. М. Численное решение гранично-временного интегрального уравнения типа волнового потенциала: интегральные уравнения в прикладном моделировании / Р. М. Пасичнык // Тез. докл. 2-й респ. науч.-техн. конф. – Киев. – 1986. – С. 175–176.
5. Положий Г. Н. Уравнения математической физики / Г. Н. Положий. – Москва: Высшая школа, 1964. – 560 с.
6. Bamberger A. Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retarde de la diffraction d'une onde acoustique (I) / A. Bamberger, T. Ha. Duong // Math. Methods Appl. Sci. – 1986. – No 8 (3). – P. 405–435.

7. *Bamberger A.* Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigide / A. Bamberger, T. Ha. Duong // *Math. Methods Appl. Sci.* – 1986. – No 8. – P. 598–608.
8. *Bebendorf M.* Hierarchical matrices: a means to efficiently solve elliptic boundary value problems / M. Bebendorf. – Springer Science & Business Media, 2008.
9. *Chapko R.* Wave propagation from lateral Cauchy data using a boundary element method / R. Chapko, B. Tomas Johansson, Yu. Muzychuk, A. Hlova // *Wave Motion.* – November, 2019. – Vol. 91. – Article 102385. – <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102385>.
10. *Hackbusch W.* Hierarchical matrices: algorithms and analysis // Springer Ser. in Computational Math. – 2015. – Vol. 49. – 511 p.
11. *Hlova A. R.* Coupling of Laguerre Transform and Fast BEM for solving Dirichlet initial-boundary value problems for the wave equation / A. R. Hlova, S. V. Litynskyi, Yu. A. Muzychuk, A. O. Muzychuk // *J. of Computational and Appl. Math.* – 2018. – No 2 (128). – P. 42–60.
12. *Hsiao G. C.* Boundary integral equations / G. C. Hsiao, W. L. Wendland // *Appl. Math. Sciences.* – Vol. 164. – Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008. – 620 p.
13. *Laliena A. R.* A distributional version of Kirchhoff's formula / A. R. Laliena, F. J. Sayas // *J. of Math. Analysis and Applications.* – 2009. – No 1. – P. 197–208.
14. *Litynskyi S.* Solving of the initial-boundary value problems for the wave equation by the use of retarded potential and the Laguerre transform / S. Litynskyi, A. Muzychuk // *Matematychni Studii.* – Vol. 44, Num. 2. – P. 185–203.
15. *Litynskyi S.* On the numerical solution of the initial boundary value problem with Neumann condition for the wave equation by the use of the laguerre transform and boundary elements method / S. Litynskyi, Y. Muzychuk, A. Muzychuk // *Acta Mechanica et Automatica, The J. of Bialystok Techn. Univ.* – 2016. – Vol. 10, No 4. – P. 285–290.
16. *Litynskyi S.* Combination of the Laguerre Transform with BEM for the solution of integral equations with retarded kernel / S. Litynskyi, Y. Muzychuk, A. Muzychuk // *J. of Math. Science.* – Vol. 236, № 1. – DOI 10.1007/s10958-018-4100-x.
17. *Litynskyi S.* On weak solution of a boundary value problem for an infinite triangular system of elliptic equations with Robin boundary conditions / S. Litynskyi, Yu. Muzychuk // *Proceedings of XV International Seminar/Workshop on Direct and Inverse problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2010).* – Tbilisi, 2010. – P. 192-195.
18. *Muzychuk Yu.* On the boundary integral equations method for Robin boundary value problems received as a result of the Laguerre transform of mixed problems for evolution equations / Yu. Muzychuk // *Odesa National University Herald. Math. and Mech.* – 2013. – Vol. 18, Num. 4 (20). – P. 38-49.
19. *Muzychuk Yu. A.* On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Yu. A. Muzychuk, R. S. Chapko // *Matematychni Studii.* – 2012. – Vol. 38. – P. 12–34.
20. *Saad Y.* GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems / Y. Saad, M. H. Schultz // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* – 1986. – Vol. 7, Iss. 3. – P. 856–869.
21. *Sayas F. J.* Retarded potentials and time domain boundary integral equations: a road map / F. J. Sayas. – Springer Intern. Publ., 2016. – 241 p.

*Стаття: надійшла до редколегії 04.11.2019
доопрацьована 15.11.2019
прийнята до друку 20.11.2019*

**NUMERICAL SOLUTION OF INITIAL
BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION
USING KIRCHHOFF'S FORMULA AND LAGUERRE
TRANSFORM**

A. Hlova, S. Litynskyi, Yu. Muzychuk, A. Muzychuk

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine,
e-mail: a.hlova@gmail.com, s.litynskyi@gmail.com,
yuriy.muzychuk@gmail.com, anatol.muzychuk@gmail.com*

Exterior Dirichlet and Robin initial boundary-value problems for the homogeneous wave equation with homogeneous initial conditions are considered in domains which are three-dimensional in spatial variables. Using a solution representation by the Kirchhoff formula these problems are reduced to time-domain boundary integral equations (TDBIEs) with unknown Cauchy data on a boundary surface. We have one nonstationary integral equation with an unknown normal derivative of the solution of the problem in the case of the Dirichlet problem and a system of two TDBIEs for both Cauchy data for the Robin problem. As a result of applying the Laguerre transform in the time variable to that TDBIEs and regrouping the corresponding Fourier-Laguerre coefficients, we obtained infinite sequences of boundary integral equations (BIEs), which depend only on the coordinates at boundary surfaces. All BIEs obtained from the Dirichlet problem are represented by the same elliptic boundary operator in the left-hand side of the equations and by recurrently dependent expressions in the right-hand sides. In the case of Robin problem, the structure of the resulting sequence is similar, but now we are dealing with a matrix operator, which is composed of four boundary operators and is elliptic in some Sobolev space. For the numerical solution of obtained BIEs, a fast boundary element method was developed as an implementation of the Galerkin method. The unknown traces and normal derivatives of the solutions are approximated by linear and piece-wise constant basis functions, respectively. To reduce the required storage and computational costs, an adaptive cross-approximation of the discretized boundary operators was implemented. A series of computational experiments on the numerical solution of the Dirichlet and Robin model problems were carried out. Their results demonstrate the high accuracy and estimated order of convergence of the proposed method.

Key words: Dirichlet initial-boundary value problem, Robin initial-boundary value problem, homogeneous wave equation, Kirchhoff formula, retarded surface potentials, Laguerre transform, time domain boundary integral equation, Fast Galerkin boundary element method, adaptive cross approximation discrete boundary operators.